Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Elektrotechnik und Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Default-Logik

Bachelorarbeit

im Studiengang Informatik

von

Svenja Schobel

Hannover, 6. März 2017

Erstprüfer:	Prof. Dr. Heribert Vollmer
Zweitprüfer:	Dr. Arne Meier
Betreuer:	M. Sc. Martin Lück

Erklärung der Selbstständigkeit

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keinem anderen Prüfungsamt vorgelegen.

Hannover, den 6. März 2017

Svenja Schobel

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

1.1 Schlüsse ziehen trotz unvollständiger Information

Häufig finden wir uns im Alltag in Situationen, in denen wir Annahmen treffen, ohne alle Details zu kennen. Sehen wir zum Beispiel am Morgen viele Äste auf der Straße liegen, gehen wir davon aus, dass es in der Nacht stürmisch gewesen ist. Gehen wir in den Supermarkt und finden einen bestimmten Artikel nicht, nehmen wir an, dass er ausverkauft ist. Von einem Kind mit Schultasche, das uns morgens entgegen kommt, nehmen wir an, dass es auf dem Weg zur Schule ist. Und wenn wir einen Vogel auf dem Boden sitzen sehen, nehmen wir an, dass er fliegen kann.

Das Vogelbeispiel ist das wohl beliebteste Beispiel in Arbeiten über das Thema der Default-Logik und auch wir wollen es hier nutzen, um den Vorteil dieser Logik gegenüber der klassischen Logik zu verdeutlichen:

Beispiel 1.1. Wir betrachten ein Tier, über das wir keine anderen Informationen haben, als dass es ein Vogel ist. Wir wissen, dass Vögel gewöhnlich fliegen können, aber wir wissen auch, dass es Vogelarten gibt, die das nicht können. In Prädikatenlogik erster Stufe können wir diesen Sachverhalt folgendermaßen darstellen:

$$\forall x(VOGEL(x) \land \neg PINGUIN(x) \land \neg STRAUSS(x) \land \ldots \to FLIEGT(x)).$$

Dabei stoßen wir auf ein großes Problem: Dass $VOGEL(x)$ wahr ist, wissen wir. Allerdings benötigen wir noch die Belegungen für $\neg PINGUIN(x)$, $\neg STRAUSS(x)$ etc. Wir wissen nicht, welcher Art x angehört. Obwohl wir gern einfach annehmen würden, dass x fliegen kann, können wir unsere Formel nicht auswerten, da uns die nötigen Informationen fehlen.

Die von Reiter [8] vorgestellte *Default-Logik* soll genau dieses Problem lösen, indem sie es uns ermöglicht, Annahmen standardmäßig (*„by default“*) zu treffen. Wir wollen in dieser Arbeit eine Einführung in das Thema geben und uns dabei an Reiters Arbeit orientieren. Definitionen, Sätze und deren Beweise stammen – sofern nicht anders angegeben – aus ebendiesem.

1.2 Nicht-monotone Logik

Obwohl unsere Default-Annahmen sich in vielen Fällen vermutlich als wahr herausstellen – sonst wäre die ganze Idee ja eher sinnlos – werden wir manchmal feststellen müssen, dass wir uns geirrt haben. Unser gesuchtes Produkt im Supermarkt ist gar nicht ausverkauft – der zuständige Mitarbeiter hat bloß vergessen, die Nachlieferung einzuräumen. Kurz nachdem wir das Kind mit der Schultasche gesehen haben, fällt uns auf, dass es gar nicht in Richtung Schule unterwegs war. Es ist also nicht auszuschließen, dass es vorhat zu schwänzen. Der Vogel, der auf dem Boden sitzt, wird wahrscheinlich kein Strauß sein, den wir für eine Taube gehalten haben, aber einer seiner Flügel könnte verletzt sein.

Neue Informationen haben hier unsere vorherigen Folgerungen ungültig gemacht. Im Gegensatz zur klassischen Logik ist die von uns betrachtete Logik demzufolge nicht-monoton. Denn eine Logik heißt *monoton*, falls, wenn $A \vdash w$[1] gilt, auch $A \cup B \vdash w$ gilt (wobei w eine logische Formel ist und A und B Mengen solcher Formeln sind, [8]). Bei der Verwendung nicht-monotoner Logik können wir unsere Folgerungen also widerrufen, wenn wir feststellen, dass sie falsch sind.

1.3 Anwendungen der Default-Logik

Das menschliche Denken ist geprägt von „standardmäßigen“ und zum Teil falschen Annahmen, wie gerade beschrieben. Aus diesem Grund findet die Default-Logik vor allem Anwendung in der **künstlichen Intelligenz**, um solche Schlussfolgerungen nachzubilden.

Beispielsweise beschreibt Prakken [7] die Anwendung nicht-monotoner Logik im Bereich der **Rechtswissenschaft**. Die Anwendung klassischer Logik sei hier problematisch, weil rechtliche Vorschriften zu viele Ausnahmen hätten und die vorhandenen Informationen oft subjektiv oder inkonsistent seien,

[1] $\vdash$ ist die Ableitungsrelation, also „w ist logisch aus A ableitbar“.

wie z. B. moralische Vorstellungen oder Meinungen. Außerdem hinterfrage man Gesetze häufig und lasse Ausnahmen zu, die aber nicht alle explizit in der Gesetzgebung aufgelistet werden können. Prakken führt mehrere nicht-monotone Logiken als Ansätze an, darunter auch die Default-Logik.

Auch in der **Medizin** kommt die Default-Logik zur Anwendung, wie von Gross [4] erläutert. Da alle Menschen verschieden seien und Krankheiten und ihre Verläufe sich daher ebenfalls auf verschiedene Weise zeigten, erfolgten Diagnosen unter anderem aufgrund von Erfahrung und Intuition und nicht anhand strenger, klassischer Logik. Man verwende aber – bewusst oder unbewusst – nicht-monotone Logik, die es zulässt, bisher gezogene Schlüsse wieder zu verwerfen und unpassende Befunde als Ausnahmen einzuordnen. Jedoch sei es hier notwendig, gewissenhaft abzuwägen. Eine undurchdachte Klassifizierung eines solchen Befundes als Ausnahme, durch die dieser Befund ignoriert würde, berge durchaus Gefahren.

Natürlich gibt es auch einige **Implementierungen** der Default-Logik, wie DeReS oder XRay. Wir wollen in dieser Einführung nicht genauer auf sie eingehen. Details können in [1] und [10] nachgelesen werden.

2 Defaults – Definitionen und Beispiele

2.1 Formale Definitionen

Im Folgenden betrachten wir eine Sprache L_A, bestehend aus Formeln über einem Alphabet A, die wir kurz als L bezeichnen.

Bisher haben wir nur über Gründe für die Verwendung von Default-Logik gesprochen, aber noch keine Defaults in der von Reiter eingeführten Darstellung gesehen. Wir betrachten dazu jetzt noch einmal das Vogelbeispiel:

$$\frac{VOGEL(x) : \mathsf{M}FLIEGT(x)}{FLIEGT(x)}$$

M lesen wir hier als „es ist konsistent anzunehmen, dass“. Den gesamten Default können wir also als „Wenn x ein Vogel ist und es konsistent ist anzunehmen, dass x fliegen kann, dann schließe daraus, dass x fliegen kann“ lesen. Umgangssprachlich könnten wir ihn auch umschreiben mit: „Die meisten Vögel können fliegen.“

Allgemein gilt:

Definition 2.1. Ein **Default** ist eine Regel der Form

$$\frac{\alpha(x) : \mathsf{M}\beta_1(x), \ldots, \mathsf{M}\beta_m(x)}{w(x)},$$

$m \geq 1$. Dabei heißen die logischen Formeln $\alpha(x)$ **Voraussetzung** (*„prerequisite“*), $\beta_1(x), \ldots, \beta_m(x)$ **Rechtfertigung** (*„justification“*, [5]), und $w(x)$ **Konsequenz** (*„consequent“*).

Im Fließtext kann ein Default auch als $\alpha(x){:}\ M\beta_1(x), \ldots, M\beta_m(x)\ /\ w(x)$ geschrieben werden.

Natürlich benötigen wir auch noch eine Reihe von Aussagen über unsere Welt, um sagen zu können, ob die Rechtfertigungen konsistent sind oder nicht. Sinnvolle Informationen für das Vogelbeispiel wären Formeln, die angeben, welche Vogelarten nicht fliegen können, sowie Formeln, die angeben, was für

Vögel vorhanden sind, wie etwa

- $\forall x(PINGUIN(x) \rightarrow \neg FLIEGT(x))$,
- $\forall x(STRAUSS(x) \rightarrow \neg FLIEGT(x))$,
- $\forall x(HAUSHUHN(x) \rightarrow \neg FLIEGT(x))$,
- $\exists x(VOGEL(x) \wedge TAUBE(x))$.

Diese Formeln fassen wir mit den Defaults zu einer Default-Theorie zusammen:

Definition 2.2. Ein Paar $\Delta = (D, W)$, wobei D eine Menge von Defaults ist und W eine Menge geschlossener Formeln (also Formeln ohne freie Variablen), bezeichnen wir als **Default-Theorie**.

In Abschnitt 3 wird es zuerst ausschließlich um geschlossene Default-Theorien gehen. Wir benötigen daher noch die folgenden beiden wichtigen Definitionen:

Definition 2.3. Ein Default heißt **geschlossen**, falls α, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ und w geschlossen sind, d. h. keine freien Variablen aufweisen. Sonst heißt der Default **offen**.

Definition 2.4. Eine Default-Theorie $\Delta = (D, W)$ heißt geschlossen, wenn alle Defaults in D geschlossen sind, und sonst offen.

Eine spezielle Unterklasse der geschlossenen Default-Theorien sind die geschlossenen normalen Default-Theorien. Es gilt:

Definition 2.5. Eine Default-Theorie heißt **normal**, wenn alle ihre Defaults normal sind, d. h. wenn sie die Form

$$\frac{\alpha(x) : \mathsf{M}w(x)}{w(x)}$$

haben.

Die besonderen Eigenschaften der geschlossenen normalen Default-Theorien werden wir in Abschnitt 3.1.1 behandeln.

2.2 Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir zuerst einige allgemeine Beispiele für Default-Theorien betrachten und an ihnen auch die Notwendigkeit für offene Defaults demonstrieren. Danach sehen wir uns zwei Logik-Probleme an, die durch die Verwendung von Defaults bequem zu lösen sind und die auch Reiter in [8] behandelt: Die *closed world assumption* und das *Rahmenproblem*. Wir werden diese allerdings anhand anderer spezifischer Beispiele erläutern als Reiter.

2.2.1 Allgemeine Beispiele

Beispiel 2.6.

Sei

$$D := \left\{ \frac{\exists x(R(x)) \colon \mathsf{M}(\forall w \exists y \exists z(w \to S(y,z)))}{\exists x \exists y(P(x,y))} \right\}$$

und

$$W := \{\exists x(R(x)), \exists w \forall y \forall z(w \to \neg S(y,z))\}.$$

Man sieht leicht, dass der Default in D und W unmöglich gleichzeitig gelten können, da die zweite Formel in w der Rechtfertigung des Defaults widerspricht. Wir können also nicht auf $\exists x \exists y(P(x,y))$ schließen.

Bei diesem Beispiel handelt es sich offensichtlich um eine **geschlossene Default-Theorie**. Wir wollen als nächstes versuchen, ein anschaulicheres Beispiel, nämlich wieder unser Vogelbeispiel, in geschlossener Form darzustellen:

Beispiel 2.7. Den Default in unserer Theorie hatten wir bisher angegeben als

$$\frac{VOGEL(x) : \mathsf{M}FLIEGT(x)}{FLIEGT(x)}.$$

x ist eine freie Variable, die wir quantifizieren müssen, um einen geschlossenen Default zu erhalten:

$$\frac{\forall x VOGEL(x) \colon \mathsf{M}(\forall x FLIEGT(x))}{\forall x FLIEGT(x)}.$$

Was dieser Default jetzt aber aussagt, ist Folgendes:

„Wenn für *alle* x gilt, dass sie Vögel sind, und es konsistent ist anzunehmen, dass *alle* x fliegen können, dann nimm an, dass *alle* x fliegen können."

Wir wollten aber gar nicht für alle x etwas folgern. Was wir ausdrücken wollten, war einfach, dass wir annehmen können, dass irgendein Vogel x, den wir gerade betrachten, fliegen kann, wenn es konsistent ist, das anzunehmen.

Die Anwendung des Allquantors hat also leider nicht den gewünschten Effekt. Wir versuchen es mit dem Existenzquantor:

$$\frac{\exists x VOGEL(x) \colon \mathsf{M}(\exists x FLIEGT(x))}{\exists x FLIEGT(x)}.$$

„Wenn es ein x gibt, das ein Vogel ist, und, wenn es konsistent ist anzunehmen, dass es ein x gibt, dass fliegen kann, nimm an, dass es ein x gibt, das fliegen kann."

Das ist natürlich ebenfalls nicht, was wir sagen wollten. Wir wollten nicht wissen, ob wir annehmen dürfen, dass *irgendein x existiert*, das fliegen kann. Wir wollten wissen, ob wir annehmen dürfen, dass das *von uns gerade betrachtete x* fliegen kann.

Wir könnten noch versuchen, Existenz- und Allquantoren zu mischen. Aber auch dann würden wir immer noch Aussagen über *alle x* oder über die bloße *Existenz eines x* treffen, statt darüber, ob die Aussage des Defaults für ein bestimmtes, von uns betrachtetes Individuum gilt. Anscheinend ist es nicht möglich, diesen Default in geschlossener Form zufriedenstellend darzustellen.

Wir merken also, dass wir mit geschlossenen Defaults nicht immer auskommen. Gerade, wenn wir Beispiele aus dem Alltag betrachten, untersuchen wir in der Regel bestimmte Individuen und nicht alle Individuen oder die Existenz eines Individuums. Ab und zu setzen wir vielleicht die Existenz eines Objektes voraus, weil wir annehmen wollen, dass jemand dieses besitzt:

$$\frac{STUDENT(x) \colon \mathsf{M}(\exists y(COMPUTER(y) \wedge BESITZT(x,y))}{\exists y(COMPUTER(y) \wedge BESITZT(x,y))}.$$

Hier ist aber der Besitzer immer noch ein variables Individuum und der Default bleibt offen.

Da offene Defaults unseren Überlegungen zufolge notwendig sind, betrachten wir das Vogelbeispiel jetzt noch einmal genau in offener Form:

Beispiel 2.8. Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, besteht diese Default-Theorie aus

$$D := \left\{ \frac{VOGEL(x) \colon \mathsf{M}FLIEGT(x)}{FLIEGT(x)} \right\}$$

und

$$\begin{aligned} W := \{&\forall x(PINGUIN(x) \to \neg FLIEGT(x)), \\ &\forall x(STRAUSS(x) \to \neg FLIEGT(x)), \ldots\}. \end{aligned}$$

Ohne uns an dieser Stelle Gedanken über die formalen Mechanismen zu machen, würden wir jetzt intuitiv für einen Vogel, der weder $PINGUIN$ noch $STRAUSS$ noch sonst eine Relation, die in einer entsprechende Formel in W vorkommt, erfüllt, folgern, dass er fliegen kann.

Der einzige Default in D ist – wie ausführlich diskutiert – nicht geschlossen. Es handelt sich demnach auch nicht um eine geschlossene Default-Theorie. Offensichtlich handelt es sich aber um eine **normale Default-Theorie**, denn Rechtfertigung und Konsequenz sind identisch.

Tatsächlich behauptet Reiter in [8] sogar, alle natürlich auftretenden Defaults seien in dieser Normalform darstellbar, was er mit Criscuolo in [9] jedoch wieder zurücknimmt. Gerade bei den dort beschriebenen „interagierenden Defaults“ sind sogenannte **semi-normale Defaults** der Form

$$\frac{\alpha(x) : \mathsf{M}(\beta(x) \wedge w(x))}{w(x)}$$

notwendig:

Beispiel 2.9. Stellen wir uns vor, x hat leichtes Fieber. Vermutlich ist er oder sie bloß erkältet:

$$\frac{FIEBER(x) : \mathsf{M}ERK\ddot{A}LTET(x)}{ERK\ddot{A}LTET(x)}.$$

Mit einer Erkältung wird x wahrscheinlich nicht extra zum Arzt gehen, solange die Symptome sich nicht verschlimmern.

$$\frac{ERK\ddot{A}LTET(x) : \mathsf{M}\neg GEHT\_ZUM\_ARZT(x)}{\neg GEHT\_ZUM\_ARZT(x)}.$$

Beide Defaults einzeln betrachtet erscheinen sinnvoll. Betrachten wir sie jedoch zusammen – lassen wir sie sozusagen „interagieren“ –, machen sie weniger Sinn. Wir können offensichtlich von $FIEBER(x)$ auf $ERK\ddot{A}LTET(x)$ und von $ERK\ddot{A}LTET(x)$ auf $\neg GEHT\_ZUM\_ARZT(x)$ schließen. Es scheint, als könnten wir transitiv von $FIEBER(x)$ auf $\neg GEHT\_ZUM\_ARZT(x)$ schließen. Natürlich wollen wir aber nicht davon ausgehen, dass die meisten Menschen mit Fieber nicht zum Arzt gehen. Sicherlich gibt es einige Menschen mit Fieber, die einen Arztbesuch für überflüssig halten. Es besteht aber die Möglichkeit, dass eine Infektion vorliegt, die unbedingt behandelt werden sollte. Daher wollen wir $\neg GEHT\_ZUM\_ARZT(x)$ hier nicht als den Regelfall annehmen.

Wir passen den zweiten Default ein wenig an:

$$\frac{ERK\ddot{A}LTET(x) : \mathsf{M}(\neg FIEBER(x) \wedge \neg GEHT\_ZUM\_ARZT(x))}{\neg GEHT\_ZUM\_ARZT(x)}.$$

Wir können noch immer von $FIEBER(x)$ auf $ERK\ddot{A}LTET(x)$ schließen und von $ERK\ddot{A}LTET(x)$ auf $\neg GEHT\_ZUM\_ARZT(x)$, wenn wir die Defaults einzeln betrachten. Denn solange wir im zweiten Default nichts darüber wissen, ob x Fieber hat, ist es konsistent anzunehmen, dass x kein Fieber hat. Doch wenn wir uns beide Defaults zusammen ansehen, wird das transitive Schließen von $FIEBER(x)$ auf $\neg GEHT\_ZUM\_ARZT(x)$ durch $\mathsf{M}\neg FIEBER(x)$ in diesem nun semi-normalen Default blockiert, sodass noch immer die Mehrheit der fiebrigen x zum Arzt gehen darf.

Semi-monotone Default-Theorien weisen allerdings keine Vorteile gegenüber den allgemeinen, nicht-normalen Default-Theorien auf. Daher werden sie hier keine größere Rolle spielen.

2.2.2 Closed World Assumption

Angenommen, uns liegt eine Datenbank vor, die eine größere Menge an Personen und deren Familienbeziehungen enthält. Die meisten dieser Personen sind natürlich nicht miteinander verwandt. Vor allem ist zum Beispiel eine Frau Mutter von nur relativ wenigen Kindern, während sie „Nicht-Mutter" von sehr vielen ist. Dementsprechend ist es einfacher anzunehmen, dass nicht dargestellte Beziehungen nicht wahr sind. Als Default lässt sich diese Annahme in Bezug auf das Beispiel folgendermaßen darstellen:

$$\frac{:\mathsf{M}\neg MUTTER(a,b)}{\neg MUTTER(a,b)}.$$

(„Wenn es (ohne bestimmte Voraussetzung) konsistent ist anzunehmen, dass a nicht Mutter von b ist, dann schließe daraus, dass a nicht Mutter von b ist.")

Allgemein, für eine n-stellige Relation R:

$$\frac{:\mathsf{M}\neg R(x_1,\ldots,x_n)}{\neg R(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Unter Anwendung dieser sogenannten *closed world assumption* ist also nur die Darstellung positiver Informationen notwendig, von denen in der Regel deutlich weniger vorhanden sind als negative Informationen. Ein System, das uns eine Frage über die Datenbank beantworten soll, muss jetzt nur diese

Informationen durchsuchen. Findet es die entsprechende Information nicht, gibt es zurück, dass die Anfrage nicht wahr ist.

2.2.3 Das Rahmenproblem

Verändert man den Zustand eines Objektes in irgendeiner Weise, hat das in vielen Fällen keine Auswirkung auf andere Objekte. Schließt man beispielsweise die Haustür ab, schalten sich drinnen glücklicherweise nicht die Herdplatte und das Bügeleisen ein. Ebenso bleiben die Fenster geschlossen, das Sofa an Ort und Stelle und der Kühlschrank füllt sich leider auch nicht plötzlich von selbst. Die Liste der Invarianten ist schier unendlich.

Um dieses Rahmenproblem zu lösen und nicht alle Invarianten explizit auflisten zu müssen, verwenden wir die folgende Default-Regel:

$$\frac{R(x,s) : \mathsf{M}R(x, f(x,s))}{R(x, f(x,s))}.$$

Dabei ist x ein Objekt, s ein Zustand, f eine Zustandsübergangfunktion und R eine Relation, die in irgendeiner Weise ein Objekt und einen Zustand verknüpft.

Betrachten wir beispielsweise ein Objekt *herd* und eine Relation AUS. Im Zustand s_1 ist der Herd ausgeschaltet: $AUS(herd, s_1)$. Wir führen irgendeine Aktion aus, durch die der Herd nicht beeinflusst wird, z. B. schließen wir die Tür ab: $abschlie\ss en(herd, s_1) = s_1$. Wir dürfen annehmen, dass der Herd immer noch ausgeschaltet ist, weil dies konsistent ist: $AUS(herd, s_1)$. Wir könnten festlegen, dass $einschalten(herd, s_1) = s_2$ gilt und $\neg AUS(herd, s_2) \in W$. In diesem Fall dürften wir natürlich nicht mehr annehmen, dass $AUS(herd, s_2)$ gilt, nachdem wir den Herd eingeschaltet haben.

3 Extensionen für Default-Theorien

Im vorherigen Abschnitt haben wir bereits anhand von Defaults den ein oder anderen Schluss gezogen. Wir haben uns jedoch noch keine Gedanken darüber gemacht, was es eigentlich bedeutet, wenn wir aus einer Default-Theorie solche Schlüsse ziehen.

Die Menge W logischer Formeln beschreibt eine Welt – allerdings nur unvollständig. Das Anwenden von Defaults hilft, unsere Vorstellung von dieser Welt weiter zu vervollständigen, indem wir W durch die Konsequenzen der Defaults erweitern. So entsteht eine sogenannte **Extension** für die entsprechende Default-Theorie. Wir wollen diese Extensionen nun genauer betrachten.

Wie bereits angekündigt, beschäftigen wir uns dabei zunächst nur mit den geschlossenen Default-Theorien. Wie wir die folgenden Definitionen und Sätze dann auf offene Theorien übertragen können, klären wir in Abschnitt 3.2.

3.1 Extensionen für geschlossene Default-Theorien

Im Folgenden werden wir häufig die folgende Definition benötigen:

Definition 3.1. Für eine Menge geschlossener Formeln $S \subseteq L$ definieren wir:

$$\mathrm{Th}_L(S) := \{w \mid w \in L, w \text{ ist geschlossen und es gilt } S \vdash w\}.$$

Wenn klar ist, um welche Sprache es geht, können wir auch einfach Th statt Th_L schreiben.

Eine grobe Vorstellung davon, was eine Extension ist, haben wir bereits. Wir wollen uns nun ihre **Eigenschaften** ansehen:

(1) Eine Extension enthält alle ursprünglichen Formeln aus W: $W \subseteq E$.

(2) Sie sollte deduktiv abgeschlossen sein, d.h. $\mathrm{Th}(E)$ enthält dieselben Elemente wie E, es lassen sich keine neuen Elemente mehr ableiten: $\mathrm{Th}(E) = E$.

(3) Für einen Default $\alpha : \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m \;/\; w$ sollte w in der Extension E enthalten sein, wenn $\alpha \in E$ und $\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_m \notin E$.

Aus diesen Eigenschaften leitet sich die **formale Definition einer Extension** ab:

Definition 3.2. Sei $\Delta = (D, W)$ eine geschlossene Default-Theorie. Für eine beliebige Menge geschlossener Formeln $S \subseteq L$ sei $\Gamma(S)$ die kleinste Menge, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(1) $W \subseteq \Gamma(S)$

(2) $\mathrm{Th}(\Gamma(S)) = \Gamma(S)$

(3) Ist $(\alpha\colon \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m \;/\; w) \in D,\ \alpha \in \Gamma(S)$ und $\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_m \notin S$, dann ist $w \in \Gamma(S)$.

Eine Menge geschlossener Formeln $E \subseteq L$ ist eine Extension für Δ genau dann, wenn $\Gamma(E) = E$.

Eine wichtige Eigenschaft dabei, die gegeben sein muss, die Reiter [8] aber nicht erwähnt, ist die folgende:

Lemma 3.3. $\Gamma(S)$ *ist wohldefiniert.*

Beweis. Zuerst einmal muss überhaupt eine Menge existieren, die (1) – (3) erfüllt. Eine solche Menge ist offensichtlich L. Allerdings könnte es mehrere minimale Mengen geben, die die Bedingungen erfüllen, da Mengen nur partiell geordnet sind. Die kleinste Menge muss aber der Schnitt über alle Mengen sein, die die Bedingungen erfüllen. Dazu müssen wir natürlich noch zeigen, dass der Schnitt dann auch wieder die Bedingungen erfüllt:

Sei C die Menge aller Mengen $B \subseteq L$, die die Bedingungen (1) – (3) erfüllen. $C \neq \emptyset$, weil $L \in C$. Wir zeigen für jede Bedingung, dass $\bigcap C$ sie erfüllt.

(1) $W \subseteq \bigcap C$:

Für alle B gilt $W \subseteq B$. Betrachten wir $x \in W$: Wegen $W \subseteq B$ gilt auch $x \in B$ für alle B. Da dies für jedes beliebige $x \in W$ gilt, muss $W \subseteq \bigcap C$ gelten.

(2) $\mathrm{Th}(\bigcap C) = \bigcap C$:

Wir betrachten ein $w \in \mathrm{Th}(\bigcap C)$. Angenommen $w \notin \bigcap C$. Dann muss es eine Menge $B \in C$ geben, für die $w \notin B$ gilt. Da wir aber wissen, dass $\mathrm{Th}(B) = B$ gilt, müsste folglich $w \notin \mathrm{Th}(B)$ und damit, wegen $B \in C$, auch $w \notin \mathrm{Th}(\bigcap C)$ gelten. Das widerspricht aber unserer ursprünglichen Annahme, dass $w \in \mathrm{Th}(\bigcap C)$. Also gilt $w \in \bigcap C$ und damit $\mathrm{Th}(\bigcap C) = \bigcap C$.

(3) Ist $(\alpha : \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m \;/\; w) \in D,\ \alpha \in \bigcap C,\ \neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_m \notin S$, dann ist $w \in \bigcap C$:

Angenommen, für ein $(\alpha : \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m \;/\; w) \in D$ gilt $\alpha \in \bigcap C$, aber $w \notin \bigcap C$. Dann muss es ein $B \in C$ geben mit $\alpha \in B$, aber $w \notin B$. Wir wissen aber, dass alle $B \in C$ Bedingung (3) erfüllen, sodass dies ein Widerspruch wäre. Auch diese Bedingung ist also erfüllt.

□

Bevor wir die doch etwas verwirrende Definition 3.2 anhand einiger Beispiele erläutern, wollen wir zuerst zwei intuitivere Darstellungsmöglichkeiten für Extensionen zeigen. Diese stellen formal dar, was wir zu Beginn des Abschnitts 3 als Beschreibung von Extensionen angegeben haben: dass sie durch die Erweiterung der Menge W durch die Konsequenzen der anwendbaren Defaults entstehen.

Satz 3.4. *Sei $E \subseteq L$ eine Menge geschlossener Formeln und $\Delta = (D, W)$ eine geschlossene Default-Theorie. Sei $E_0 = W$ und für $i \geq 0$ gelte:*

$$\begin{aligned} E_{i+1} = {} & \mathrm{Th}(E_i) \\ & \cup \left\{ w \;\middle|\; \frac{\alpha : \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m}{w} \in D, \text{ mit } \alpha \in E_i \text{ und } \neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_m \notin E \right\}. \end{aligned}$$

Dann ist E eine ***Extension*** *für Δ genau dann, wenn*

$$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i.$$

Die Extension wird hier also gebildet, indem so lange die Konsequenzen der anwendbaren Defaults hinzugefügt werden, bis keine Veränderung mehr eintritt. Dabei ist zu beachten, dass die Rechtfertigungen mit der gesamten Extension konsistent sein müssen, nicht nur mit dem aktuellen „Zwischenprodukt“. Das macht zwar die Berechnung schwieriger, sollte aber für das Verständnis erst einmal unproblematisch sein.

Beweis. Zuallererst muss $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ die drei Bedingungen aus Definition 3.2 erfüllen:

(1) $W \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ ist erfüllt, da $W = E_0 \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$.

(2) $\mathrm{Th}(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i) = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ ist erfüllt, weil für E_{i+1} jeweils $\mathrm{Th}(E_i)$ mit den in diesem Schritt ableitbaren Konsequenzen vereinigt wird. Da wir dieses Vorgehen bis E_∞ fortsetzen, wird die zum Schluss entstandene Menge abgeschlossen sein.

(3) Wenn $(\alpha\colon \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m \,/\, w) \in D,\ \alpha \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ und $\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta m \notin E$, dann gilt $w \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$. Diese Bedingung ist laut der Definition von E_{i+1} offensichtlich erfüllt.

Da $\Gamma(E)$ die minimale Menge ist, die die Bedingungen (1) – (3) aus der Definition erfüllt, muss gelten:

$$\Gamma(E) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i. \tag{$*$}$$

Wir zeigen jetzt, dass E eine Extension ist genau dann, wenn $E = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} E_i$:

„⇒“: Um zu zeigen, dass $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ gilt, wenn E eine Extension ist (also wenn $E = \Gamma(E)$ gilt), nutzen wir $(*)$ und zeigen induktiv $E_i \subseteq E$ für alle $i \geq 0$:

- Da E eine Extension für Δ ist, gilt $E = \Gamma(E)$. Es gelten $W \subseteq \Gamma(E)$ und $W = E_0$, also $E_0 \subseteq E$.
- Wir nehmen an, dass $E_i \subseteq E$ gilt und betrachten $w \in E_{i+1}$:

  Entweder gilt bereits $w \in \mathrm{Th}(E_i)$. Dann gilt $w \in \mathrm{Th}(E)$, da $E_i \subseteq E$.

  Oder es existiert $(\alpha : \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m \;/\; w) \in D$ mit $\alpha \in E_i$ und $\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_m \notin E$. Dann ist $\alpha \in E = \Gamma(E)$, da $E_i \subseteq E$, und laut Definition 3.2 gilt $w \in \Gamma(E)$ bzw. $w \in E$. Also gilt $E_{i+1} \subseteq E$.

Folglich gilt $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} E_i \subseteq E$. Wegen $\Gamma(E) = E$ und $(*)$ gilt:

$$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i.$$

„$\Leftarrow$“: Wir müssen zeigen, dass E eine Extension ist, wenn $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ gilt. Es muss also $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = \Gamma(E)$ und damit $E = \Gamma(E)$ gelten. Um dies zu beweisen, nutzen wir $(*)$ und zeigen dann noch induktiv $E_i \subseteq \Gamma(E)$ für alle $i \geq 0$:

- Offensichtlich gilt $E_0 \subseteq \Gamma(E)$ wegen $E_0 = W$ und Punkt (1) der Definition 3.2.
- Wir nehmen an, dass $E_i \subseteq \Gamma(E)$ gilt und betrachten $w \in E_{i+1}$:

  Entweder gilt bereits $w \in \mathrm{Th}(E_i)$. Dann gilt $w \in \mathrm{Th}(\Gamma(E)) = \Gamma(E)$, da $E_i \subseteq \Gamma(E)$.

  Oder es existiert $(\alpha : \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m \;/\; w) \in D$ mit $\alpha \in E_i$ und $\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_m \notin E$. Dann ist $\alpha \in E = \Gamma(E)$, da $E_i \subseteq E$, und laut Definition 3.2 gilt $w \in \Gamma(E)$. Also gilt $E_{i+1} \subseteq \Gamma(E)$.

Folglich gilt $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} E_i \subseteq \Gamma(E)$ und mit $(*)$ gilt $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} E_i = \Gamma(E)$. Damit gilt $E = \Gamma(E)$, sodass E eine Extension ist.

$\square$

Mit zwei weiteren Definitionen lässt sich dieselbe Idee ohne iterative Vereinigung darstellen:

Definition 3.5. Unter der Menge der **generierenden Defaults** versteht man diejenigen Defaults, deren Voraussetzungen in der Extension E einer geschlossenen Default-Theorie $\Delta = (D, W)$ enthalten sind und deren Rechtfertigungen konsistent in Bezug auf E sind:

$$GD(E, \Delta) := \left\{ \frac{\alpha : \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m}{w} \in D \;\middle|\; \alpha \in E \text{ und } \neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_m \notin E \right\}.$$

Definition 3.6.

$$CONSEQUENTS(D) := \left\{ w(x) \;\middle|\; \frac{\alpha(x) : \mathsf{M}\beta_1(x), \ldots, \mathsf{M}\beta_m(x)}{w(x)} \in D \right\}$$

bezeichnet die Menge der Konsequenzen der Defaults in D. (Die Defaults müssen hier nicht notwendig geschlossen sein.)

Damit können wir Extensionen jetzt folgendermaßen betrachten:

Satz 3.7. *Für eine geschlossene Default-Theorie Δ und jede ihrer Extensionen E gilt:*

$$E = \mathrm{Th}(W \cup CONSEQUENTS(GD(E, \Delta))).$$

Beweis.

„$\subseteq$: Wir nutzen Satz 3.4 und zeigen induktiv $E_i \subseteq \mathrm{Th}(W \cup CONSEQUENTS(GD(E, \Delta)))$ für alle $i \geq 0$:

- $E_0 = W \subseteq r.S.$[2]
- Wir nehmen an, dass $E_i \subseteq r.S.$ und betrachten $\phi \in E_{i+1}$:
  Entweder gilt bereits $\phi \in \mathrm{Th}(E_i)$. Dann gilt $\phi \in r.S.$, weil $\mathrm{Th}(E_i) \subseteq r.S.$
  Oder es gilt $\phi = w$ und es existiert $(\alpha : \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m \,/\, w) \in D$ mit $\alpha \in E_i$ und $\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_m \notin E$. Dann gilt $\alpha \in E$ wegen $\alpha \in E_i$

[2] r.S. = rechte Seite (der Gleichung)

und daraus folgt $(\alpha : \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m \;/\; w) \in GD(E, \Delta)$. Es gilt also $\phi \in CONSEQUENTS(GD(E, \Delta)) \subseteq r.S.$

Folglich gilt $E_i \subseteq \mathrm{Th}(W \cup CONSEQUENTS(GD(E, \Delta)))$ für alle $i \geq 0$, sodass $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = E \subseteq \mathrm{Th}(W \cup CONSEQUENTS(GD(E, \Delta)))$ gilt.

„$\supseteq$“: Es ist ausreichend zu zeigen, dass $W \cup CONSEQUENTS(GD(E, \Delta)) \subseteq E$, da $\mathrm{Th}(E) = E$.

- Offensichtlich gilt $W \subseteq E$, da $W = E_0$.
- Wir müssen also noch $CONSEQUENTS(GD(E, \Delta)) \subseteq E$ zeigen: Wir betrachten ein $w \in CONSEQUENTS(GD(E, \Delta))$. Es muss also $(\alpha : \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m / w) \in D$ geben mit $\alpha \in E$ und $\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_m \notin E$. Laut Satz 3.4 gilt $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$. Deswegen muss $\alpha \in E_i$ für ein i und folglich $w \in E_{i+1}$ gelten. Also gilt $w \in E_{i+1} \subseteq E$.

Folglich gilt $W \cup CONSEQUENTS(GD(E, \Delta)) \subseteq E$ und damit $\mathrm{Th}(W \cup CONSEQUENTS(GD(E, \Delta))) \subseteq E$.

$\square$

Wir kommen jetzt zu den angekündigten Beispielen, die dabei helfen sollten, die Definition 3.2 zu verstehen.

Beispiel 3.8. Wir betrachten die Default-Theorie $\Delta = (D, W)$ mit

$$D := \left\{ \underbrace{\frac{: \mathsf{M}A}{A}}_{D_1}, \underbrace{\frac{A \wedge F : \mathsf{M}\neg C}{B}}_{D_2}, \underbrace{\frac{\neg B : \mathsf{M}C}{C}}_{D_3} \right\}$$

und

$$W := \{F,\ B \to \neg C\}.$$

In der Definition ist von einer beliebigen Menge geschlossener Formeln S die Rede. Betrachten wir also beispielsweise $S_1 := \mathrm{Th}(W \cup \{A, C\})$. Aus C

folgt $\neg B \in S_1$ wegen $(B \to \neg C) \equiv (\neg B \vee \neg C)$. Laut Punkt (3) der Definition können wir keine Defaults anwenden, deren Rechtfertigungen negiert in dieser Menge enthalten sind. S_1 widerspricht dem Default D_2. Deshalb betrachten wir nur D_1 und D_3, wenn wir jetzt die Menge $\Gamma(S_1)$ bilden.

Aus dem Default D_1 können wir ohne Voraussetzung A ableiten und zu $\Gamma(S_1)$ hinzufügen. Mit $\neg B$ als Voraussetzung leiten wir C aus D_3 ab und erhalten

$$\Gamma(S_1) = \mathrm{Th}(W \cup \{A, C\}).$$

Wir sehen, dass $\Gamma(S_1) = S_1$. Die Menge ist (offensichtlich) deduktiv abgeschlossen und enthält W. Sie ist außerdem die kleinste Menge, die die Bedingungen in Bezug auf S_1 erfüllt. Denn würden wir A weglassen, hätten wir D_1 nicht angewendet, obwohl das möglich ist. Würden wir C weglassen, hätten wir D_3 nicht angewendet. Demnach ist S_1 eine Extension für Δ.

Konstruieren wir als nächstes eine Menge S_2, bei der wir den ersten und zweiten Default, aber nicht den dritten, anwenden können: $S_2 := \mathrm{Th}(W \cup \{A, \neg C\})$. Aus D_1 leiten wir A ab, aus D_2 leiten wir B ab (F ist bereits in W enthalten) und aus B leiten wir (laut W) $\neg C$ ab. Wir erhalten also

$$\Gamma(S_2) = \mathrm{Th}(W \cup \{A, B, \neg C\}).$$

$\Gamma(S_2) \neq S_2$. Wir versuchen es mit $S_3 := \Gamma(S_2)$. Wieder können wir die Defaults D_1 und D_2 anwenden. Jetzt gilt:

$$\Gamma(S_3) = \mathrm{Th}(W \cup \{A, B, \neg C\}) = S_3.$$

Auch S_3 ist also eine Extension für Δ.

Nun könnten wir es noch mit einer Menge versuchen, die $\neg A$ enthält. Allerdings können wir schon sehen, dass diese Menge nach Anwendung von Γ nicht mehr $\neg A$ enthalten wird, da wir $\neg A$ an keiner Stelle ableiten können. Betrachten wir dazu z. B. die Menge $S_4 := \mathrm{Th}(W \cup \{\neg A, \neg C\})$:

Aufgrund der Rechtfertigungen ist nur D_2 anwendbar. Allerdings ist hier die Voraussetzung nicht erfüllt, sodass wir B nicht ableiten können und

$$\Gamma(S_4) = \mathrm{Th}(W) \neq S_4$$

erhalten. Auch $S_5 := \mathrm{Th}(W \cup \{\neg A, \neg B, C\})$, bei der nur D_3 anwendbar ist, führt zu keiner weiteren Extension. Wir erhalten hier $\Gamma(S_5) = \mathrm{Th}(W \cup \{\neg B, C\}) \neq S_5$. Würden wir damit weiterrechnen, wäre wieder A enthalten und wir würden doch wieder bei S_1 landen.

Als nächstes betrachten wir ein Beispiel, in dem es nur eine Extension gibt:

Beispiel 3.9.

$$D := \left\{ \frac{:\mathsf{M}A}{A}, \frac{B : \mathsf{M}\neg A}{C} \right\}, \ W := \emptyset.$$

Diese Theorie hat nur die Extension

$$E = \mathrm{Th}(\{A\}).$$

Offensichtlich wurde nur der erste Default angewendet. Der zweite wird durch seine Rechtfertigung blockiert.

Erhalten wir nicht vielleicht eine weitere Extension, wenn nur der zweite Default anwendbar ist?

Betrachten wir $S_1 := \mathrm{Th}(\{\neg A, B, C\})$. Wir erhalten $\Gamma(S_1) = \mathrm{Th}(\{B, C\}) \neq S_1$. Da $\neg A$ sich nicht ableiten lässt, kann es nach Anwendung von Γ nicht mehr in der Menge enthalten sein. Wenn $\Gamma(S) = S$ gelten soll, darf also $\neg A$ nicht in S enthalten sein, sodass wir keine Möglichkeit haben, den ersten Default zu blockieren und trotzdem eine Extension zu konstruieren.

Es haben allerdings nicht alle Default-Theorien Extensionen. In der Theorie mit $D = \{:\mathsf{M}A \,/\, \neg A\}, W = \emptyset$, die auch Reiter in [8] als Beispiel nennt, scheint das relativ offensichtlich. Die Begründung ist aber etwas komplexer als „der Default widerspricht sich selbst“:

Beispiel 3.10.

$$D := \left\{ \frac{: \mathsf{M}A}{\neg A} \right\},\ W := \emptyset.$$

Kandidaten für Extensionen wären hier $E_1 = \mathrm{Th}(\emptyset)$, $E_2 = \mathrm{Th}(\{\neg A\})$ und $E_3 = \mathrm{Th}(\{A\})$.

Betrachten wir zuerst $\mathrm{Th}(\emptyset)$. Da die Menge nicht $\neg A$ enthält, ist der Default anwendbar. Wenden wir Γ an, erhalten wir deshalb $\Gamma(\mathrm{Th}(\emptyset)) = \mathrm{Th}(\{\neg A\}) \neq \mathrm{Th}(\emptyset)$. E_1 ist also keine Extension für die Theorie.

Für $\mathrm{Th}(\{\neg A\})$ ist kein Default anwendbar, sodass wir $\Gamma(\mathrm{Th}(\{\neg A\}) = \mathrm{Th}(\emptyset) \neq \mathrm{Th}(\{\neg A\})$ erhalten. Auch E_2 ist keine Extension.

Die letzte Möglichkeit ist $\mathrm{Th}(\{A\})$. Der Default ist anwendbar und wir erhalten $\Gamma(\mathrm{Th}(\{A\})) = \mathrm{Th}(\{\neg A\}) \neq \mathrm{Th}(\{A\})$. Damit ist die letzte Möglichkeit, E_3, ebenfalls keine Extension.

Einen alternativen Ansatz, bei dem alle Default-Theorien eine Extension haben, liefert Łukaszewicz [6]. Vereinfacht gesagt werden bei ihm Defaults nur dann angewendet, wenn ihre Konsequenz keiner Rechtfertigung eines bereits angewendeten Defaults widerspricht und auch auf sonst keine Weise zu Inkonsistenzen führt.

Eine wesentliche Eigenschaft der Default-Logik ist die bereits zu Anfang genannte **Nicht-Monotonie**. Diese hat natürlich auch Auswirkungen auf die Extensionen. Bei „ähnlichen“ Theorien beobachtet man, dass ihre Extensionen vollkommen verschieden sein können. Wenn eine Theorie $\Delta = (D, W)$ eine Extension E hat, dann muss eine Theorie $\Delta' = (D', W')$ mit $D' \supseteq D$ und $W' \supseteq W$ nicht unbedingt eine Extension $E' \supseteq E$ haben. Sehen wir uns ein Beispiel dazu an:

Beispiel 3.11. Wir betrachten

$$\Delta = (D, W) \ \text{ mit } D := \left\{ \frac{: \mathsf{M}A}{B} \right\} \text{ und } W := \emptyset.$$

Man sieht leicht, dass Δ die Extension $E = \mathrm{Th}(\{B\})$ hat.

Wir betrachten außerdem

$$\Delta' = (D', W') \text{ mit } D' := \left\{ \frac{: \mathsf{M}A}{B}, \frac{C : \mathsf{M}F}{\neg A} \right\} \text{ und } W' := \{C\}.$$

Offensichtlich gilt $D' \supseteq D$ und $W' \supseteq W$.

B konnten wir zuvor ableiten, weil es konsistent war, anzunehmen, dass A gilt. In Δ' gilt jetzt C und es ist konsistent anzunehmen, dass F gilt. Wir leiten also $\neg A$ ab. Das heißt aber, dass wir $: \mathsf{M}A \,/\, B$ nicht mehr anwenden können, denn es ist jetzt nicht mehr konsistent anzunehmen, dass A gilt. Für $\mathrm{Th}(W \cup \{\neg A\})$ ist nur der zweite Default anwendbar. Also gilt $\Gamma(\mathrm{Th}(W \cup \{\neg A\})) = \mathrm{Th}(W \cup \{\neg A\})$ und Δ' hat die Extension

$$E' = \mathrm{Th}(W \cup \{\neg A\}).$$

Wir sehen, dass $E' \not\supseteq E$, obwohl $D' \supseteq D$ und $W' \supseteq W$. Die Default-Theorien Δ und Δ' verhalten sich also offensichtlich nicht-monoton in Bezug auf ihre Extensionen.

Es gilt aber natürlich der folgende Satz:

Satz 3.12. *Sei E eine Extension für $\Delta = (D, W)$ und $B \subseteq E$. Dann ist E auch eine Extension für $\Delta' = (D, W \cup B)$.*

Dass E eine Extension bleibt, wenn eine Teilmenge von E zu W hinzugefügt wird, sollte recht einleuchtend sein. Wir wollen diesen Satz daher hier nicht beweisen.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Extensionen für geschlossene Default-Theorien ist die Minimalität:

Satz 3.13. (Minimalität von Extensionen.) *Sind E und F Extensionen einer geschlossenen Default-Theorie und $E \subseteq F$, dann gilt $E = F$.*

Beweis. Zu zeigen ist $F \subseteq E$.

Laut Satz 3.4 gilt $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ und $F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$.
Wir zeigen induktiv $F_i \subseteq E_i$ für alle $i \geq 0$:

- $F_0 \subseteq E_0$, weil $F_0 = W = E_0$.
- Wir nehmen an, dass $F_i \subseteq E_i$ gilt und betrachten ein $w \in F_{i+1}$:

  Entweder gilt bereits $w \in \mathrm{Th}(F_i)$. Dann gilt $w \in \mathrm{Th}(E_i) \subseteq E_{i+1}$, da $F_i \subseteq E_i$.

  Oder es existiert $(\alpha\colon \mathsf{M}\beta_1, \ldots, \mathsf{M}\beta_m \,/\, w) \in D$ mit $\alpha \in F_i$ und $\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_m \notin F$. Dann gilt $\alpha \in E_i$ wegen $F_i \subseteq E_i$ und $\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_m \notin E$ wegen $E \subseteq F$.

  Es gilt also $w \in E_{i+1}$.

Damit gilt $F_i \subseteq E_i$ für alle $i \geq 0$, also $F \subseteq E$. □

Die folgende Definition sowie die beiden Korollare werden wir vor allem für einige Beweise im nächsten Abschnitt brauchen:

Definition 3.14. Eine Default-Theorie hat eine **inkonsistente Extension**, genau dann wenn eine ihrer Extensionen die Menge aller logischen Formeln in L ist.

Korollar 3.15. *Eine geschlossene Default-Theorie (D, W) hat eine inkonsistente Extension genau dann, wenn W inkonsistent ist.*

Das Korollar kann aus Satz 3.4 abgeleitet werden. Dass die Extension E inkonsistent ist, wenn W inkonsistent ist, folgt offensichtlich aus $W \subseteq E$. W ist inkonsistent, wenn E inkonsistent ist, weil $E = L$ jeder Rechtfertigung widerspricht. Es können also keine Defaults angewendet werden, sodass $\mathrm{Th}(W) = E$ gelten muss und damit bereits W inkonsistent sein muss.

Korollar 3.16. *Hat eine geschlossene Default-Theorie eine inkonsistente Extension, so ist diese ihre einzige Extension.*

Dieses Korollar kann leicht aus Satz 3.13 abgeleitet werden: Eine weitere Extension E müsste zwangsläufig eine Teilmenge von L sein, aber dann würde $E = L$ gelten.

3.1.1 Extensionen für geschlossene normale Default-Theorien

Wir beschäftigen uns jetzt mit den bereits erwähnten geschlossenen normalen Default-Theorien. Diese haben die folgende erfreuliche Eigenschaft:

Satz 3.17. *Jede geschlossene normale Default-Theorie besitzt eine Extension.*

Beweis. Ist W inkonsistent, hat die Theorie trivialerweise eine Extension, nämlich die inkonsistente (Korollar 3.15). Betrachten wir also den Fall, dass W konsistent ist:

Wir definieren $E_0 = W$, und für $i \geq 0$ sei T_i eine maximale Menge geschlossener Formeln, sodass gilt:

(1) $E_i \cup T_i$ ist konsistent und

(2) wenn $u \in T_i$, dann muss für ein $(\alpha\colon \mathsf{M}w \,/\, w) \in D$ gelten, dass $u = w$ und $\alpha \in E_i$.

Wir definieren $E_{i+1} = \mathrm{Th}(E_i) \cup T_i$ und $E = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} E_i$. Um zu zeigen, dass E eine Extension für (D, W) ist, zeigen wir

$$T_i = \left\{ w \;\middle|\; \frac{\alpha : \mathsf{M}w}{w} \in D \text{ mit } \alpha \in E_i \text{ und } \neg w \notin E \right\},$$

denn dann entspricht E Satz 3.4.

Angenommen $T_i \neq r.S.$ Offensichtlich gilt $T_i \subseteq r.S.$, also muss es $u \in r.S./T_i$ geben.

Da T_i maximal ist, muss gelten

$$\begin{aligned}
& T_i \cup \{u\} \text{ inkonsistent} \\
\Rightarrow\ & E_i \cup T_i \cup \{u\} \text{ inkonsistent} \\
\Rightarrow\ & \mathrm{Th}(E_i) \cup T_i \cup \{u\} \text{ inkonsistent} \\
\Rightarrow\ & E_{i+1} \cup \{u\} \text{ inkonsistent} \\
\xRightarrow{E_{i+1} \subseteq E}\ & E \cup \{u\} \text{ inkonsistent} \\
\xRightarrow{\mathrm{Th}(E)=E}\ & \neg u \in E
\end{aligned}$$

Das ist aber ein Widerspruch zu $u \in r.S.$, sodass $T_i = r.S.$ gelten muss. □

Außerdem sind geschlossene normale Default-Theorien semi-monoton:

Satz 3.18. (Semi-Monotonie.) *Sei W eine Menge geschlossener Formeln und seien D' und D Mengen geschlossener, normaler Defaults mit $D' \subseteq D$. E' sei eine Extension für $\Delta' = (D', W)$. Dann hat $\Delta = (D, W)$ eine Extension E, sodass*

(1) $E' \subseteq E$ und

(2) $GD(E', \Delta') \subseteq GD(E, \Delta)$.

Beweis. Ist W inkonsistent, so ist E' inkonsistent (Korollar 3.15). Laut Korollar 3.16 ist E' dann die einzige Extension, sodass $E' = E$ gilt. In diesem Fall wäre der Satz offensichtlich bewiesen.

Wir betrachten den Fall, dass W und E' konsistent sind:

(1) Wir beweisen zuerst $E' \subseteq E$.

Wir bilden eine Default-Theorie (D, E'). Da E' konsistent ist, hat diese Theorie eine konsistente Extension $E \supseteq E'$. Es bleibt zu zeigen, dass E eine Extension nicht nur für (D, E') ist, sondern auch für $\Delta = (D, W)$.

Wir definieren $F_0 = W$ und für $i \geq 0$:

$$F_{i+1} = \mathrm{Th}(F_i) \cup \left\{ w \;\middle|\; \frac{\alpha : \mathsf{M}w}{w} \in D \text{ mit } \alpha \in F_i \text{ und } \neg w \notin E \right\}.$$

Gilt $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$, dann ist E eine Extension für Δ (Satz 3.4).

Zuerst zeigen wir

$$E' \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i,$$

damit wir diese Beziehung gleich verwenden können. Es gilt $E' = \bigcup_{i=0}^{\infty} E'_i$, $E'_0 = W$ und für $i \geq 0$:

$$E'_{i+1} = \mathrm{Th}(E'_i) \cup \left\{ w \;\middle|\; \frac{\alpha : \mathsf{M}w}{w} \in D' \text{ mit } \alpha \in E'_i \text{ und } \neg w \notin E' \right\}.$$

Wir zeigen induktiv $E'_i \subseteq F_i$ für alle $i \geq 0$:

- $E'_0 \subseteq F_0$ gilt wegen $E'_0 = W = F_0$.
- Wir nehmen an, dass $E'_i \subseteq F_i$ gilt und betrachten $w \in E'_{i+1}$:

  Entweder gilt bereits $w \in Th(E'_i)$. Dann gilt $w \in \mathrm{Th}(F_i) \subseteq F_{i+1}$, da $E'_i \subseteq F_i$.

  Oder es existiert $(\alpha\colon \mathsf{M}w \,/\, w) \in D'$ mit $\alpha \in E'_i$ und $\neg w \notin E'$. Dann gilt $\alpha \in F_i$ wegen $E'_i \subseteq F_i$ und $(\alpha\colon \mathsf{M}w / w) \in D$ wegen $D' \subseteq D$. Das heißt, $w \in F_{i+1}$, wenn $\neg w \notin E$. Es gilt $w \in E'_{i+1} \subseteq E' \subseteq E$. Wäre $\neg w \in E$, dann wäre E inkonsistent. Da W konsistent ist, wäre das ein Widerspruch. Also gilt $w \in F_{i+1}$.

Es gilt also $E' \subseteq \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} F_i$ und wir zeigen jetzt

$$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i.$$

Dabei gilt $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$, $E_0 = E'$ und für $i \geq 0$:

$$E_{i+1} = \mathrm{Th}(E_i) \cup \left\{ w \;\middle|\; \frac{\alpha : \mathsf{M}w}{w} \in D \text{ mit } \alpha \in E_i \text{ und } \neg w \notin E \right\}.$$

„$\subseteq$“: Wir zeigen induktiv $E_j \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ für alle $j \geq 0$:

- Dass $E' \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$, also $E_0 \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$, gilt, haben wir gerade gezeigt.
- Wir nehmen an, dass $E_j \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ gilt, und betrachten $w \in E_{j+1}$:
  Entweder gilt bereits $w \in \mathrm{Th}(E_j)$. Dann gilt auch $w \in \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$, da $E_j \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ und $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ deduktiv abgeschlossen ist.
  Oder es existiert $(\alpha\colon \mathsf{M}w \,/\, w) \in D$ mit $\alpha \in E_j$ und $\neg w \notin E$. Dann gilt $\alpha \in \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$, da $E_j \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$. Also gilt $\alpha \in F_i$ für ein i und, wegen $\neg w \notin E$, $w \in F_{i+1} \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$.

Damit gilt $E \subseteq \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} F_i$.

„$\supseteq$“: Es gilt $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$. Wir zeigen also induktiv $F_i \subseteq E_i$ für alle $i \geq 0$:

- Es gilt $F_0 = W \subseteq E' = E_0$.
- Wir nehmen an, dass $F_i \subseteq E_i$ gilt und betrachten $w \in F_{i+1}$:
  Entweder gilt bereits $w \in \mathrm{Th}(F_i)$. Dann gilt $w \in \mathrm{Th}(E_i) \subseteq E$, weil $F_i \subseteq E_i$.
  Oder es existiert $(\alpha\colon \mathsf{M}w \,/\, w) \in D$ mit $\alpha \in F_i$ und $\neg w \notin E$. Dann gilt $\alpha \in E_i$ wegen $F_i \in E_i$ und es gilt $w \in E_{i+1}$ wegen $\neg w \notin E$.

Also gilt $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} F_i \subseteq E$.

Damit haben wir gezeigt, dass $E = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} F_i$ gilt. Somit ist E eine Extension für $\Delta = (D, W)$, sodass $E' \subseteq E$.

(2) Es bleibt zu zeigen $GD(E', \Delta') \subseteq GD(E, \Delta)$. Wir betrachten dazu $(\alpha\colon \mathsf{M}w \,/\, w) \in GD(E', \Delta')$. Es gilt also $(\alpha\colon \mathsf{M}w \,/\, w) \in D'$, $\alpha \in E'$, $\neg w \notin E'$.

Außerdem gilt $D' \subseteq D, E' \subseteq E$, sodass auch $(\alpha\colon \mathsf{M}w \,/\, w) \in D$ und $\alpha \in E$ gilt. Laut Satz 3.7 gilt $E' = \mathrm{Th}(W \cup CONSEQUENTS(GD(E', \Delta')))$. Da offensichtlich $w \in CONSEQUENTS(GD(E', \Delta'))$, gilt $w \in E'$, also auch $w \in E$ wegen $E' \subseteq E$. Da E konsistent ist, muss gelten $\neg w \notin E$.

Deswegen gilt $(\alpha : \mathsf{M}w \,/\, w) \in GD(E, \Delta)$ und damit $GD(E', \Delta') \subseteq GD(E, \Delta)$.

□

Die in Abschnitt 2.2.1 kurz angesprochenen semi-normalen Default-Theorien besitzen laut [9] beide diese Eigenschaften nicht.

Für geschlossene normale Default-Theorien mit mehreren Extensionen gelten außerdem die folgenden beiden Sätze:

Satz 3.19. (Orthogonalität von Extensionen.) *Hat eine geschlossene normale Default-Theorie (D, W) die voneinander verschiedenen Extensionen E und F, so ist $E \cup F$ inkonsistent.*

Beweis. Laut Satz 3.4 ist $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$. Es gilt $E_0 = W$ und für $i \geq 0$:

$$E_{i+1} = \mathrm{Th}(E_i) \cup \left\{ w \;\middle|\; \frac{\alpha : \mathsf{M}w}{w} \text{ mit } \alpha \in E_i \text{ und } \neg w \notin E \right\}.$$

Entsprechendes gilt für F.

Da E und F voneinander verschiedene Extensionen sind, muss es einen Index $i \geq 0$ geben, sodass $E_i = F_i$ aber $E_{i+1} \neq F_{i+1}$ gilt. Das heißt, für ein $(\alpha\colon \mathsf{M}w \;/\; w) \in D$ gilt, dass $\alpha \in E_i = F_i$ und $\neg w \notin E$, sodass $w \in E_{i+1}$, aber $w \notin F_{i+1}$. Dafür muss $\neg w \in F$ gelten, weil ja $\alpha \in F_i$ gilt.

Wir haben also $w \in E$ und $\neg w \in F$. $E \cup F$ enthält damit sowohl w als auch $\neg w$, ist also inkonsistent. □

Satz 3.20. *Sei $\Delta = (D, W)$ eine geschlossene normale Default-Theorie. Sei $D' \subseteq D$ und seien E'_1, E'_2 verschiedene Extensionen von $\Delta' = (D', W)$. Dann hat Δ die verschiedenen Extensionen $E_1 \supseteq E'_1$ und $E_2 \supseteq E'_2$.*

Wir sehen also, dass das Hinzufügen von geschlossenen normalen Defaults zu einer geschlossenen normalen Default-Theorie nie zu einer Theorie führen kann, die weniger Extensionen als die ursprüngliche besitzt. Die Anzahl der Extensionen ist hierbei also monoton nicht-fallend.

Beweis. Laut Satz 3.18 hat Δ Extensionen E_1 und E_2, sodass $E'_1 \subseteq E_1$ und

$E_2' \subseteq E_2$. Angenommen, es gilt $E_1 = E_2$. Dann müsste gelten $E_1' \cup E_2' \subseteq E_1$. Allerdings ist $E_1' \cup E_2'$ laut Satz 3.19 inkonsistent. Entsprechend wäre E_1 inkonsistent und mit Korollar 3.15 wäre auch W inkonsistent. Δ' hat aber die verschiedenen Extensionen E_1' und E_2', was zum Widerspruch führt, da es laut Korollar 3.16 nur die eine inkonsistente Extension geben dürfte, wenn W inkonsistent ist. Das heißt also $E_1 \neq E_2$. □

3.2 Extensionen für offene Default-Theorien

All diese Definitionen und Sätze für geschlossene Default-Theorien nützen uns aber natürlich nicht viel, wenn wir die offenen Default-Theorien aus unseren anfänglichen Beispielen betrachten. In diesem Abschnitt wollen wir uns daher mit der Übertragung auf offene Default-Theorien beschäftigen.

Wir werden in diesem Abschnitt immer wieder die Default-Theorie $\Delta = (D, W)$ mit

$$D := \left\{ \frac{VOGEL(x) : \mathsf{M} FLIEGT(x)}{FLIEGT(x)} \right\}$$

und

$$\begin{aligned} W := \{ & \forall x (PINGUIN(x) \rightarrow \neg FLIEGT(x)), \\ & \exists y VOGEL(y), \\ & \exists z (VOGEL(z) \wedge PINGUIN(z)) \} \end{aligned}$$

betrachten.

Spontan wollen wir hier zeigen, dass y nicht nur $VOGEL$ erfüllt, sondern auch $FLIEGT$. Allerdings ist y eine Variable – *irgendein* Element, das $VOGEL$ erfüllt. Wir wissen, dass ein solches Element existiert, es hat aber noch keinen Namen, mit dem wir es ansprechen können. Daher ersetzen wir die Variable durch eine neue Konstante α, die noch nicht in der Menge der Funktionen $F \subseteq A$ vorhanden ist:

$$VOGEL(\alpha).$$

Man nennt diese Umformung **Skolemisierung**. Die allgemeine Vorgehensweise für eine geschlossene Formel w in pränexer Normalform ist die folgende:

1. Ersetze die erste existenziell quantifizierte Variable y durch eine Funktion $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$. $x_1, \ldots, x_n$ sind dabei die vor y allquantifizierten Variablen in w. σ soll ein neues Funktionssymbol sein, das in F noch nicht vorkommt.

2. Wiederhole diesen Vorgang für alle existenziell quantifizierten Variablen in w.

3. Entferne alle Quantoren aus w.

Bemerkung. Konstanten kommen bei diesem Vorgang zustande, wenn vor einem Existenzquantor keine Allquantoren stehen. Die eingeführte Skolemfunktion ist dann 0-stellig, also eine Konstante.

Achtung: Laut [8] sollen am Ende alle Formeln aus W in skolemisierter Form vorliegen. Für Formeln wie $\forall x(PINGUIN(x) \rightarrow \neg FLIEGT(x))$ macht das aber natürlich wenig Sinn, weil diese nach der Skolemisierung offen wären. Wir werden daher davon ausgehen, dass Allquantoren in Formeln aus W im letzten Schritt *nicht* entfernt werden. Bei allquantifizierten Variablen geht es uns ja ohnehin nicht um bestimmte Individuen. Wir wollen damit (zumindest in W) eher allgemeine Regeln darstellen, die wir auf bestimmte Individuen anwenden können.

Die neu eingeführten Funktionen bilden die Menge der **Skolemfunktionen**, die wir mit Σ bezeichnen wollen.

Unsere Defaults liegen immer noch in offener Form vor. Sie einfach mit Quantoren versehen können wir nicht; das würde ihre Bedeutung verändern (s. Beispiel 2.7). Wir skolemisieren zuerst einmal auch die Defaults. Dazu werden noch freie Variablen in der Konsequenz allquantifiziert. Die Konsequenz wird dann skolemisiert, während der obere Teil des Defaults vollkommen unverändert bleibt. Die hierbei eingeführten Skolemfunktionen werden natürlich auch zu Σ hinzugefügt.

Unser Default $VOGEL(x) : \mathsf{M}FLIEGT(x) \;/\; FLIEGT(x)$ enthält keine Existenzquantoren in der Konsequenz. Er bleibt daher unverändert.

Da wir bisher nur die Skolemisierung einer Formel ohne Allquantoren und einer ganz ohne Quantoren gesehen haben, betrachten wir ein weiteres kurzes Beispiel:

Beispiel 3.21. Nehmen wir an, die folgende Formel ist die Konsequenz eines Defaults:

$$\forall x \exists y (F(x, y, z))$$

Voraussetzung und Rechtfertigung sind beliebige logische Formeln, die wir nicht aufschreiben wollen, da sie sowieso unverändert bleiben.

1. Wir allquantifizieren die noch freie Variable z:

$$\forall x \exists y \forall z (F(x, y, z)).$$

2. Wir ersetzen y durch eine neue Skolemfunktion, die abhängig von x ist:

$$\forall x \exists y \forall z (F(x, \sigma(x), z)).$$

3. Wir entfernen alle Quantoren:

$$F(x, \sigma(x), z).$$

Die Default-Theorie liegt jetzt in skolemisierter Form vor. Geschlossen sind die Defaults aber noch immer nicht.

Die **Menge der geschlossenen Defaults** wird gebildet, indem die Variablen in den offenen Defaults durch alle möglichen Grundterme über $H(F \cup \Sigma)$ ersetzt werden. $H(F \cup \Sigma)$ bezeichnet dabei einfach die Menge aller aus F und Σ konstruierbaren Terme. Grundterme sind alle diejenigen Terme, die keine Variablen enthalten.

Definition 3.22.

$$
\begin{aligned}
&CLOSED\!-\!DEFAULTS(\Delta)\\
&\quad = \{\delta(g) \mid \delta(x) \in D,\ g \text{ ist ein Tupel von Grundtermen über } H(F \cup \Sigma)\}.
\end{aligned}
$$

$CLOSED\!-\!DEFAULTS$ enthält also keine Variablen mehr, sondern nur noch Funktionen einschließlich Konstanten. Alle Defaults in dieser Menge sind demnach geschlossen.

Beispiel 3.23. Wir betrachten wieder die Default-Theorie Δ.

Nach der Skolemisierung von W haben wir

$$
\begin{aligned}
W = \{&\forall x(PINGUIN(x) \to \neg FLIEGT(x)),\\
&VOGEL(\alpha),\\
&VOGEL(\beta) \wedge PINGUIN(\beta)\}.
\end{aligned}
$$

Der Default aus D bleibt unverändert.

In diesem Beispiel gibt es keine Funktionen in F und auch Σ enthält nur die beiden Konstanten α und β. Es gilt also $H(F \cup \Sigma) = \{\alpha, \beta\}$. Entsprechend erhalten wir auch nur die Grundterme α und β.

Wir setzen diese in unseren einen Default ein und erhalten:

$$
\begin{aligned}
&CLOSED\!-\!DEFAULTS(\Delta)\\
&\quad = \left\{\frac{VOGEL(\alpha) : \mathsf{M}FLIEGT(\alpha)}{FLIEGT(\alpha)}, \frac{VOGEL(\beta) : \mathsf{M}FLIEGT(\beta)}{FLIEGT(\beta)}\right\}.
\end{aligned}
$$

In der Regel wird diese Menge aber nicht ganz so simpel aussehen. Da wir hier abgesehen von Konstanten keine Funktionen haben, haben wir auch keine verschachtelbaren Terme.

Nehmen wir an, die Menge $F \cup \Sigma$ enthält die einstellige Funktion f, die zweistellige Funktion g und die Konstanten α und β. Daraus können wir die folgenden Grundterme bilden:

$\alpha,\ \beta,\ f(\alpha),\ f(\beta),\ f(f(\alpha)),\ g(\alpha, \beta),\ g(f(g(\alpha,\ \beta))),\ \ldots$

Wir merken, dass diese Menge **abzählbar unendlich** ist. Da wir alle diese Grundterme in alle Defaults einsetzen müssen, wird auch die Menge $CLOSED-DEFAULTS$ abzählbar unendlich sein. Da wir aber nie Annahmen über die Endlichkeit der bisher definierten Mengen gemacht haben, stört uns das bei der Verallgemeinerung der Definitionen und Sätze über geschlossene Default-Theorien nicht.

Mit der folgenden Definition lassen sich alle Resultate für geschlossene Default-Theorien auf allgemeine Default-Theorien übertragen:

Definition 3.24. E ist eine **Extension für eine allgemeine Default-Theorie** $\Delta = (D, W)$ gdw. E eine Extension für die Theorie

$$CLOSED(\Delta) = (CLOSED-DEFAULTS(\Delta), W)$$

ist.

Bemerkung. Zu beachten ist natürlich, dass wir nun mit der Sprache $L_{A\cup\Sigma}$ statt L_A arbeiten. Dabei handelt es sich jedoch um eine reine Formalität.

Wir bilden nun eine Extension für unsere Beispiel-Theorie Δ.

Beispiel 3.25. Es ist leicht zu sehen, dass $\mathrm{Th}(W)$ die Formel $\neg FLIEGT(\beta)$ enthält. Entsprechend können wir $VOGEL(\beta) : \mathsf{M}FLIEGT(\beta) / FLIEGT(\beta)$ nicht anwenden. Aus dem ersten Default können wir aber problemlos $FLIEGT(\alpha)$ ableiten.

Dass $\Gamma(E) = E$ für

$$E = \mathrm{Th}(W \cup \{FLIEGT(\alpha)\})$$

gilt, sollte offensichtlich sein, sodass E eine Extension für $CLOSED(\Delta)$ und damit für Δ ist.

E enthält auch $\exists y FLIEGT(y)$, da diese Formel logisch aus $FLIEGT(\alpha)$ folgt.

4 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir eine Einführung in Reiters Default-Logik gegeben. Diese hat klare Vorteile gegenüber der klassischen Logik, wenn das menschliche Denken nachgebildet werden soll: Wir können Schlüsse ziehen, ohne alle Details zu kennen, und wir können diese Folgerungen auch wieder zurücknehmen, wenn wir neue Informationen erhalten, durch die sie widerlegt werden. Die Default-Logik bietet sich daher für die Nutzung im Bereich der **künstlichen Intelligenz** an.

Wir haben verschiedene Klassen von Defaults und Default-Theorien betrachten. Dabei haben wir festgestellt, dass es deutlich einfacher ist, mit **geschlossenen Defaults** zu arbeiten. Besonders die geschlossenen normalen Default-Theorien bringen Vorteile. So hat z. B. jede geschlossene normale Default-Theorie eine Extension. Bei anderen Formen von Default-Theorien ist das nicht zwingend der Fall.

Leider haben wir aber festgestellt, dass man für reale Anwendungen in der Regel **offene Defaults** benötigt. Um die Definitionen und Sätze für geschlossene Theorien auf offene übertragen zu können, ist eine Umformung nötig, die vor allem für komplexe Theorien sehr aufwendig werden kann. Das größte Problem, welches uns hierbei auffällt, ist, dass die Menge der Defaults in vielen Fällen unendlich groß wird.

Worauf wir in dieser Arbeit nicht eingegangen sind, ist unter anderem die Frage, ob eine Default-Theorie eine Extension besitzt, die eine bestimmte Formel enthält, d. h. ob man diese Formel als wahr annehmen darf. Dazu gibt Reiter [8] eine Beweismethode an – allerdings nur für normale Theorien. Genau dann, wenn die betrachtete Formel einen Beweis der dort vorgestellten Form hat, gibt es eine Extension, in der sie enthalten ist. Allerdings kann man einen solchen Beweis nicht immer finden, auch wenn er existiert: Das Problem ist nicht semi-entscheidbar.

Für auf Aussagenlogik statt Prädikatenlogik basierende Default-Theorien hat Gottlob [3] dieses und zwei weitere Probleme bezüglich ihrer **Komplexität** untersucht. Das eben beschriebene Problem ist laut ihm Σ_2^P-vollständig, ebenso wie das Problem, ob eine solche Default-Theorie überhaupt eine Extension besitzt. Herauszufinden, ob eine Formel sogar in allen Extensionen einer Default-Theorie enthalten ist, ist Π_2^P-vollständig.[3] Damit sind die Hauptprobleme der auf Aussagenlogik basierenden Default-Logik zumindest nicht komplexer als $PSPACE$, denn laut [11] gilt $PH \subseteq PSPACE$.

[3] Σ_2^P und Π_2^P sind Teil der *Polynomialzeithierarchie* PH. Es gilt $\Sigma_2^P = NP^{NP}$ und $\Pi_2^P = co\text{-}NP^{NP}$. Dabei steht C^D jeweils für die Klasse der Entscheidungsprobleme, die in C liegen, wenn eine kostenlose Subroutine (= „Orakel“) für Probleme aus D genutzt werden kann.

Literatur

[1] Cholewiński, Paweł ; Marek, Viktor W. ; Truszczyński, Mirosław: Default reasoning system DeReS. In: *KR* 96 (1996), S. 518–528

[2] Doyle, Jon: A Truth Maintenance System. In: *Artificial Intelligence* (1979), Nr. 12, S. 231–272

[3] Gottlob, Georg: Complexity Results for Nonmonotonic Logics. In: *Journal of Logic and Computation* 2 (1992), Nr. 3, S. 397–425

[4] Gross, Rudolf: Individualität in der Medizin im Lichte neuerer Logiken. In: *Medizinische Klinik* 96 (2001), Nr. 11, S. 690–691

[5] Koons, Robert: Defeasible Reasoning. In: Zalta, Edward N. (Hrsg.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Spring 2014. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2014

[6] Łukaszewicz, Witold: Considerations on default logic: an alternative approach. In: *Computational Intelligence* 4 (1988), Nr. 1, S. 1–16

[7] Prakken, Henry: *Logical Tools for Modelling Legal Argument.* Springer Science+Business Media, 1997

[8] Reiter, Raymond: A Logic for Default Reasoning. In: *Artificial Intelligence* (1980), Nr. 13, S. 81–132

[9] Reiter, Raymond ; Criscuolo, Giovanni: Some representational issues in default reasoning. In: *Computers & Mathematics with Applications* 9 (1983), Nr. 1, S. 15–27

[10] Schaub, Torsten ; Brüning, Stefan ; Nicolas, Pascal: XRay: A Prolog Technology Theorem Prover for Default Reasoning: A System Description. In: McRobbie, M. A. (Hrsg.) ; Slaney, J. K. (Hrsg.): *Automated Deduction – Cade-13: 13th International Conference on Automated Deduction New Brunswick, NJ, USA, July 30 – August 3, 1996 Proceedings*, Springer, 1996, S. 293–297

[11] Stockmeyer, Larry J.: The Polynomial-Time Hierarchy. In: *Theoretical Computer Science* 3 (1977), S. 1–22