

Leibniz Universität Hannover
Institut für Theoretische Informatik

Bachelorarbeit
Vollständigkeit in modalen Logiken

Prüfer: Prof. Dr. Vollmer
Zweit-Prüfer: Dr. Beyersdorff

von
Julian-Steffen Müller
17 Juli 2009

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die hier angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Julian-Steffen Müller

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen von modalen Logiken	3
1.1	Die modale Grundsprache	3
1.1.1	Syntax der modalen Grundsprache	3
1.1.2	Semantik der modalen Grundsprache	4
1.1.3	Beispiel Ampelschaltung	5
1.2	Axiomatisierung	6
2	Vollständigkeit	8
2.1	Definition Vollständigkeit und Korrektheit	8
2.2	Kanonische Modelle	9
2.2.1	Maximale Λ -Konsistente Mengen	9
2.2.2	Lindenbaums Lemma	9
2.2.3	Beispiel: Maximale K4-Konsistente Mengen	10
2.2.4	Definition des kanonischen Modells	11
2.2.5	Beispiel: Kanonisches Modell für K4	13
2.3	Vollständigkeitsresultate	15
2.3.1	Kanonisches-Modell-Theorem	15
2.3.2	Vollständigkeit von K	16
2.3.3	Vollständigkeit von K4	16
2.3.4	Beweisstrategie für Vollständigkeitsresultate mit Hilfe kanonischer Modelle	17
2.3.5	Vollständigkeit von T	18
2.3.6	Vollständigkeit von KB	18
2.3.7	Kanonisch für eine Eigenschaft	19
2.4	Von der Semantik zur normalen Logik	20
2.4.1	Kombination kanonischer Axiome	20
2.5	Fazit	21
3	Temporale Logik	22
3.1	Grundlagen von Temporalen Logiken	22
3.2	Syntax der Temporal Logik	22
3.2.1	Semantik der Temporal Logik	22
3.3	Vollständigkeit in der Temporal Logik	24
3.3.1	Definition des kanonisches Modells in temporalen Logiken	24
3.3.2	Axiomatisierung von Λ_{F_t}	25
3.3.3	Vollständigkeit von K_t	26
3.3.4	Fazit zu temporalen Logiken	26

1 Grundlagen von modalen Logiken

In diesem Kapitel werden wir grundlegende Merkmale modaler Logiken herausarbeiten, bevor wir uns im nächsten Teil dieser Arbeit mit der Vollständigkeit in modalen Logiken beschäftigen. Dieses Kapitel baut zunächst auf dem Wissen über die Aussagenlogik auf und erweitert diese um modale Zusammenhänge. Als Grundlage dieses Abschnitts, sowie dem Großteil der Arbeit, dient das Buch von Blackburn Rijke und Venema [?].

1.1 Die modale Grundsprache

Das Alphabet Σ_{ML} der modalen Grundsprache besteht aus:

1. Einer abzählbaren Menge atomarer Formeln $\Phi = \{p, q, r, \dots\}$.
2. Den klassischen Operatoren $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$.
3. Den modalen Operatoren \Box, \Diamond .
4. Den Konstanten \perp, \top .

1.1.1 Syntax der modalen Grundsprache

Die Menge aller modalen Formeln $Fma(\Phi)$ wird mit den Symbolen aus Σ_{ML} induktiv über folgende Regeln definiert:

1. Jede atomare Variable $p \in \Phi$ und \perp ist in $Fma(\Phi)$
2. Seien $\varphi, \psi \in Fma(\Phi)$, dann gilt:
 - (a) $\neg\varphi \in Fma(\Phi)$
 - (b) $(\varphi \vee \psi) \in Fma(\Phi)$
 - (c) $(\Diamond\varphi) \in Fma(\Phi)$

Desweiteren werden folgende vereinbarungen für Abkürzungen getroffen:

1. $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) := \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$
2. $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) := \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$
3. $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) := (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$
4. $\Box\varphi := \neg\Diamond\neg\varphi$

1.1.2 Semantik der modalen Grundsprache

Die semantische Interpretation in modalen Logiken geschieht nicht nur über eine Belegungsfunktion, vielmehr wird eine binäre Relation zwischen Welten definiert (Rahmen), wobei jede Welt z.B. einen möglichen Zustand des Systems darstellt. Die Relation könnte dann z.B. angeben, welcher Zustand aus einem Anderen folgen könnte. In jeder dieser Welten erhalten die Variablen aus Φ unabhängig voneinander einen der Wahrheitswerte wahr oder falsch. Die Interpretation der Standardoperatoren sollte klar und eindeutig sein, doch die modalen Operatoren \Box und \Diamond sind nicht eindeutig interpretiert. Je nach Anwendungsbereich können sie eine andere semantische Bedeutung haben. Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf folgende klassische Interpretation:

- $\Box\varphi$ “ φ ist notwendigerweise wahr”
- $\Diamond\varphi$ “ φ ist möglicherweise wahr”

Definition des Modells Sei $\mathcal{F} = (W, R)$ ein Rahmen, über eine nichtleere Menge von Welten W und R eine binäre Relation zwischen den Welten und sei $V : \Phi \rightarrow P(W)$ eine Belegungsfunktion, welche einer Variable aus Φ auf eine Menge von Welten abbildet, dann ist $M = (\mathcal{F}, V)$ ein auf \mathcal{F} basierendes Modell.

Wahrheitswert im Modell Mit der Definition von Modellen und Rahmen kann nun der Wahrheitswert einer Formel bestimmt werden:
Seien ψ_1, ψ_2 Formeln, dann ist φ wahr oder erfüllt

1. In einer Welt $w \in W$ ($M, w \models \varphi$), wenn:
 - (a) $\varphi = p$, wobei $w \in V(p)$ (φ ist atomar)
 - (b) $\varphi = \perp$ (Falsum), nie
 - (c) $\varphi = \neg\psi_1$, wobei $M, w \not\models \psi_1$
 - (d) $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$, wobei $M, w \models \psi_1$ oder $M, w \models \psi_2$
 - (e) $\varphi = \Diamond\psi_1$, wobei $\exists u \in W$ mit wRu und $M, u \models \psi_1$
2. In einem Modell $M = (\mathcal{F}, V)$ ($M \models \varphi$ gdw. φ in jeder Welt $w \in W$ von M wahr ist ($M, w \models \varphi \quad \forall w \in W$)).

Wenn die Formel φ in mindestens einer Welt des Modells M wahr ist, dann nennen wir die Formel φ erfüllbar im Modell M .

Gültigkeit in einem Rahmen Sei $\mathcal{F} = (W, R)$ ein Rahmen und $w \in W$ eine Welt des Rahmens, dann ist die Formel φ gültig in der Welt w , wenn w in jedem Modell wahr ist, welches auf \mathcal{F} basiert ($\mathcal{F}, w \models \varphi$). Ist diese Bedingung für alle Welten aus W erfüllt, sagt man: “ φ ist gültig auf dem Rahmen \mathcal{F} ” ($\mathcal{F} \models \varphi$). Eine Formelmenge Γ ist gültig, wenn jede Formel $\varphi \in \Gamma$ auf dem Rahmen \mathcal{F} gültig ist.

Desweiteren ist φ gültig auf einer Klasse von Rahmen \mathbf{F} , wenn φ auf jedem Rahmen $\mathcal{F} \in \mathbf{F}$ gültig ist ($\mathbf{F} \models \varphi$).

Wir bezeichnen alle Formeln die auf einer Klasse von Rahmen gültig sind als $\Lambda_{\mathbf{F}}$.

1.1.3 Beispiel Ampelschaltung

Um die Anwendung von Gültigkeit und Wahrheit in einem Rahmen bzw. Modell zu demonstrieren wird in diesem Beispiel eine Ampel in der modalen Grundsprache modelliert. (Abbildung 1).

Die Ampelschaltung besitzt die vier üblichen Zustände $W = \{s_r, s_{ry}, s_g, s_y\}$, welche durch die Relation $R = \{(s_{ry}, s_g)(s_g, s_y)(s_y, s_r)(s_r, s_{ry})\}$ verknüpft werden.

Mit den atomaren Variablen $\Phi = \{r, g, y\}$ (Rot, Grün, Gelb) beschreiben wir, in welchen Zuständen eine Lampe aktiviert ist ($V(r) = \{s_{ry}, s_r\}$ $V(y) = \{(s_{ry}, s_y)\}$ $V(g) = \{s_g\}$). Nun ist der Rahmen $\mathcal{F} = (W, R)$ und das Modell $M = (\mathcal{F}, V)$ bestimmt. Wir können nun z.B. folgende Aussagen treffen:

$$M, s_{ry} \models \Box \neg r \wedge \neg y \wedge g \quad (1)$$

$$M \models (r \wedge y \wedge \neg g) \wedge \neg \Diamond (r \wedge \neg y \wedge \neg g) \quad (2)$$

$$\mathcal{F} \models \varphi \leftrightarrow \Diamond \Diamond \Diamond \Diamond \varphi \quad (3)$$

Die Formel $\Box \neg r \wedge \neg y \wedge g$ beschreibt, dass in allen Folgezuständen die Ampel grün ist. Dies können wir natürlich im Zustand rot-gelb (s_{ry}) erfüllen. Genau dies beschreibt Aussage (1). (1) beschreibt also die Erfüllbarkeit in einer bestimmten Welt des Modells. In Aussage (2) treffen wir eine allgemeinere Aussage über das Modell, denn die Formel $(r \wedge y \wedge \neg g) \wedge \neg \Diamond (r \wedge \neg y \wedge \neg g)$ besagt, dass es nicht möglich ist aus einem Rot-Gelb Zustand in einen Rot-Zustand zu gelangen. Die Formel ist, wie schon beschrieben, im gesamten Modell gültig.

Interessant ist auch die Aussage (3), denn hier haben wir eine Formel gefunden, welche auf dem Rahmen \mathcal{F} generell gültig ist, egal welchem Modell \mathcal{F} zugrunde liegt. Die Formel beschreibt, dass jeder Knoten des Rahmens Teil eines 4er-Zyklus ist.

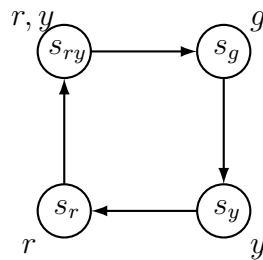


Abbildung 1: Modellierung der Ampelschaltung

1.2 Axiomatisierung

Die modale Logik ist, wie alle anderen Logiken auch, stark von einem syntaktischen Aspekt geprägt. Es besteht z.B. die Fragestellung, wie aus einer gegebenen Formelmenge andere Formeln gefolgert werden können.

Dieser syntaktische Aspekt wird in der modalen Logik dadurch abgedeckt, dass einer Logik Axiome (Eigenschaften) hinzugefügt werden, welche nicht über Inferenzregeln gefolgert werden können. Aus diesen Axiomen und Inferenzregeln können dann neue Formeln (Theoreme) gefolgert werden.

Ist eine Formelmenge Λ unter der Inferenzregel Modus Ponens abgeschlossen, dann nennen wir sie eine modale Logik. Wie genau die Inferenzregel Modus Ponens definiert ist wird im folgendem Abschnitt erläutert.

Normale modal Logik Eine modale Logik Λ heißt normal, wenn sie alle Tautologien über Φ enthält und mindesten folgende Axiome vorhanden sind:

$$\mathbf{K} \quad \Box(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \rightarrow (\Box\varphi_1 \rightarrow \Box\varphi_2)$$

$$\mathbf{Dual} \quad \Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$$

Außerdem sind folgende Inferenzregeln enthalten, mit welchen neue Theoreme gefolgert werden können.

MP Modus Ponens	Aus $\varphi \rightarrow \psi$ und φ folgere ψ
NR Notwendigkeitsregel	Aus φ folgere $\Box\varphi$

Diese kleinste normale Logik nennen wir K, außerdem wollen wir K auch als das kleinste normale System bezeichnen. Wir können größere System als K erhalten, wenn wir K um weitere Axiome erweitern.

Eine Folgerung der Formel φ , mit dem normalen System K, schreiben wir als $\vdash_K \varphi$. Man sagt auch φ entsteht durch einen K-Beweis.

Definition Sei Λ ein normales System und sei Γ eine Menge von Axiomen, dann beschreibt $\Lambda+\Gamma$ wieder eine normale Logik. Mit dieser Definition erhält man größere Systeme als K, indem man K einfach weitere Axiome hinzufügt um eine bessere Anpassung an das Problem zu erreichen. Normale Systeme werden oft dazu konstruiert, um eine bestimmte Klasse von Rahmen zu beschreiben.

Folgende Tabelle listet ein paar normale Systeme mit ihrer charakterisierenden Eigenschaft auf. Die dritte Spalte sagt aus, dass alle Formeln die man mit Hilfe der jeweiligen normalen Logik herleiten kann, auf einer bestimmten Art von Rahmen gültig sind.

K	K Axiome	Gültig auf allen Rahmen
K4	$\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	Gültig auf allen Transitiven Rahmen
T	$\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	Gültig auf allen Reflexiven Rahmen
B	$\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	Gültig auf allen Symmetrischen Rahmen
S4	$T + K4$	Gültig auf allen reflexiven und Transitiven Rahmen
S5	$S4 + B$	Gültig auf allen Äquivalenzrelationen

Λ -Ableitbarkeit Eine Formelmenge $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ist Λ -ableitbar ($\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$), wenn es eine endliche Teilmenge $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \subseteq \Gamma$ gibt, so dass $\vdash_{\Lambda} (\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \dots \wedge \gamma_n) \rightarrow \varphi$ bewiesen werden kann. Mit der Definition der Λ -Ableitbarkeit kann abschließend noch der Begriff der Λ -Konsistenz eingeführt werden, welcher im folgenden Kapitel eine zentrale Rolle spielt.

Λ -Konsistenz Eine Formelmenge Γ ist Λ -konsistent, wenn mittels Γ nicht Falsum (\perp) abgeleitet werden kann ($\Gamma \not\vdash_{\Lambda} \perp$), sollte Falsum ableitbar sein, so wird Γ als Λ -inkonsistent bezeichnet.

Analog kann eine Formel φ als Λ -konsistent bzw. -inkonsistent beschrieben werden, wobei $\Gamma = \{\varphi\}$

2 Vollständigkeit

Wie wir in dem vorangegangenen Kapitel sahen, kann man normale Logiken erstellen, welche auf einer bestimmten Klasse von Rahmen gültig sind. Z.B. gibt es die normale Logik K4, welche die Klasse der transitiven Rahmen beschreibt. Man sagt auch K4 ist vollständig für die Klasse der transitiven Rahmen. D.h. jede Formel die auf einem transitiven Rahmen gültig ist, kann auch mittels K4 gefolgert werden. Man kann über zwei Arten zu solch einem Vollständigkeitsresultat kommen. Entweder man definiert sich über Axiome eine Logik und untersucht, welche Klasse von Rahmen diese Logik beschreibt oder man interessiert sich für eine bestimmte Klasse von Rahmen und möchte die passende Axiomatisierung erstellen. Diese beiden Herangehensweisen werden in den folgenden Kapiteln dieser Arbeit behandelt. Dazu werden die Begriffe Vollständigkeit und Korrektheit formal eingeführt.

2.1 Definition Vollständigkeit und Korrektheit

Korrektheit Sei F eine Klasse von Rahmen (oder Modellen), dann ist eine Logik Λ korrekt bezüglich F , wenn für jede Formel φ gilt:

$$\vdash_{\Lambda} \varphi \text{ impliziert } F \models \varphi$$

Die Korrektheit besagt, dass alle Formeln, welche bewiesen werden können auch auf F gültig sind. Dies ist natürlich eine Grundvoraussetzung für das Erstellen einer normalen Logik, welche auf einem bestimmten Rahmen zugeschnitten sein soll.

Starke Vollständigkeit Sei F eine Klasse von Rahmen (oder Modellen), dann ist eine Logik Λ bezüglich F stark vollständig, wenn für jede Menge Formeln $\Gamma \cup \{\varphi\}$ gilt:

$$\Gamma \models_F \varphi \text{ impliziert } \Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$$

Schwache Vollständigkeit Sei F eine Klasse Rahmen (oder Modellen), dann ist eine Logik Λ bezüglich F schwach Vollständig, wenn für jede Formel φ gilt:

$$\models_F \varphi \text{ impliziert } \vdash_{\Lambda} \varphi$$

Ein Vollständigkeitsbeweis für eine Logik Λ soll zeigen, dass alle Formeln, welche in einer Klasse von Rahmen F gültig sind, auch mittels Λ beweisbar sind. Des Weiteren ist zu sehen, dass die schwache Vollständigkeit direkt aus der starken Vollständigkeit folgt (nämlich wenn $\Gamma = \emptyset$ gilt), deswegen werden wir uns in allen kommenden Vollständigkeitsbeweisen auf die starke Vollständigkeit beschränken.

Alternative Vollständigkeitsdefinition Eine Logik Λ ist stark vollständig bezüglich einer Klasse von Rahmen (oder Modellen) F , wenn jede Λ -konsistente Formelmenge auf einem Rahmen (Modell) der Klasse F gültig (erfüllbar) ist.

Eine Logik Λ ist schwach Vollständig bezüglich einer Klasse von Rahmen (oder Modellen) F , wenn jede Λ -konsistente Formel auf einem Rahmen (Modell) der Klasse F gültig (erfüllbar) ist.

2.2 Kanonische Modelle

In diesem Kapitel werden wir uns zuerst der Fragestellung widmen, wie wir von einer axiomatisierten Logik Λ zeigen können, dass sie stark vollständig bezüglich einer Klasse von Rahmen F ist. Dabei stützt sich dieses Kapitel hauptsächlich auf das Buch von Blackburn [?]. Die alternative Definition der starken Vollständigkeit sagt aus, dass man für jede Λ -konsistente Menge zeigen muss, dass sie erfüllbar auf einem auf F basierenden Modell ist. Die Idee ist nun zu zeigen, dass jede Λ -konsistente Menge eine Teilmenge einer maximalen Λ -konsistenten Menge ist und wir nur noch ein Modell aus allen maximalen Λ -konsistenten Mengen konstruieren müssen. Doch zuerst muss geklärt werden, was überhaupt eine maximale Λ -konsistente Menge ist ¹.

2.2.1 Maximale Λ -Konsistente Mengen

Eine Menge Γ ist eine maximale Λ -konsistente Menge (Λ -MCS), wenn Γ Λ -Konsistent ist und für jede Formel $\varphi \in Fma(\Phi)$ gilt, dass entweder $\varphi \in \Gamma$ oder $\neg\varphi \in \Gamma$.

Eigenschaften maximaler konsistenter Mengen Sei Λ eine normale Logik und Γ ein Λ -MCS, dann wird Γ dadurch charakterisiert, dass es zum Einen unter Modus Ponens abgeschlossen ist, d.h. wenn φ und $\varphi \rightarrow \psi$ in Γ enthalten sind, dann ist auch ψ in Γ enthalten. Des Weiteren gilt natürlich, wie in der Definition, dass entweder φ oder $\neg\varphi$ für alle $\varphi \in Fma(\Phi)$ in Γ enthalten sein muss.

Eine letzte Eigenschaft ist, dass wenn φ oder ψ in Γ enthalten ist, dann ist auch $\varphi \vee \psi$ in Γ . Um unsere Idee eines kanonischen Modells umzusetzen, muss jetzt noch gezeigt werden, dass jede Λ -konsistente Menge Teilmenge einer maximalen Λ -konsistenten Menge ist. Genau dies sagt das Lindenbaum Lemma aus.

2.2.2 Lindenbaums Lemma

Sei Σ eine Λ -konsistente Menge, dann existiert ein Λ -MCS Σ_+ mit der Eigenschaft $\Sigma \subseteq \Sigma_+$.

Beweis Um Lindenbaum's Lemma zu beweisen geben wir zunächst ein Verfahren an, um die Menge Σ_+ zu konstruieren. Anschließend zeigen wir, dass Σ_+ die Eigenschaften einer maximalen Λ -konsistenten erfüllt.

Seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ eine Aufzählung aller Formeln aus $Fma(\Phi)$, dann wird Σ_+ auf folgende Weise konstruiert:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \Sigma \\ \Sigma_{n+1} &= \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{Falls } \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ } \Lambda\text{-Konsistenz} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{sonst} \end{cases} \\ \Sigma_+ &= \bigcup_{n>0} \Sigma_n \end{aligned}$$

¹Diese Idee des Vollständigkeitsbeweises mit maximalen konsistenten Mengen, wird auch in der Prädikatenlogik mit Henkin-Mengen verwandt.[2],[3]

Das Verfahren zur Konstruktion fügt also der Menge Σ jede Formel aus $Fma(\Phi)$ entweder positiv oder negativ hinzu, wobei die Konsistenz der Menge gewahrt wird. Diese nun gewonnene Menge ist maximal. Sollten wir eine weitere Formel φ bzw. $\neg\varphi$ hinzunehmen, wird Σ_+ inkonsistent, denn die gegenteilige Formel ist schon in Σ_+ enthalten, mit welcher dann Falsum ableitbar wäre.

□

2.2.3 Beispiel: Maximale K4-Konsistente Mengen

Um die Konstruktion einer Maximalen Λ -Konsistenten Menge zu verdeutlichen, soll in diesem Beispiel eine maximale K4-konsistente Menge erstellt werden. Wie schon erwähnt, besteht K4 aus dem normalen System K und dem 4 Axiom ($\diamond\diamond\varphi \leftarrow \diamond\varphi$), außerdem beschreibt K4 die Klasse der transitiven Rahmen.

Da maximale konsistente Mengen unendlich groß und kaum überschaubar sind, beschränken wir uns auf ein kleines System Σ . Dazu verwenden wir nur die atomaren Formeln p und q ($\Phi = \{p, q\}$).

Wir werden nun das Verfahren aus dem Beweis des Lindenbaum Lemmas benutzen, um beispielhaft Σ um einige Formeln zu erweitern.

Zunächst fügen wir alle Axiome hinzu, welche in K4 enthalten sind, diese Axiome bilden offensichtlich eine konsistente Menge.

$$\begin{aligned}\Sigma &:= \{\Box(r \rightarrow s) \rightarrow (\Box r \rightarrow \Box s)\} \quad \forall r, s \in \Phi \\ \Sigma &:= \{\Diamond r \leftrightarrow \neg\Diamond\neg r\} \quad \forall r \in \Phi \\ \Sigma &:= \{\Diamond\diamond r \leftarrow \Diamond r\} \quad \forall r \in \Phi\end{aligned}$$

Ein weiteres elementares Element von K4 sind alle Tautologien, welche wir über Φ bilden können. Diese wollen wir mit Θ bezeichnen und zu Σ hinzufügen.

$$\Sigma := \Theta$$

Nun wollen wir mit Hilfe des Konstruktionsverfahrens aus dem Beweis des Lindenbaum Lemmas die Formel $\varphi = p \rightarrow q$ hinzufügen.

Hierzu müssen wir prüfen, ob es möglich ist Falsum (\perp), mit der bereits konstruierten Formelmengemenge Σ und φ , abzuleiten. Falsum lässt sich aber auf keine Weise durch die Axiome von K4, den Tautologien über Φ und φ ableiten. Deshalb nehmen wir φ in die Menge Σ auf.

Als nächstes wollen wir Σ um die Formel $\psi = \neg(p \rightarrow q)$ erweitern und prüfen dazu die Konsistenz von $\Sigma \cup \psi$.

Doch diese Konsistenz ist natürlich nicht gegeben, denn wir können mit den Formeln φ und ψ Falsum ableiten ($\vdash_{K4} (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp$).

Auf diese Art und Weise führen wir das Konstruktionsverfahren auf alle restlichen Formeln, aus $Fma(\Phi)$ durch, um die K4-konsistente Menge Σ_+ zu erhalten.

2.2.4 Definition des kanonischen Modells

Aufbauend auf den maximalen Λ -konsistenten Mengen können wir nun kanonische Modelle definieren, welche uns entscheidend auf dem Weg zu Vollständigkeitsresultaten weiterbringen.

Ein kanonisches Modell \mathcal{M}^Λ besteht, wie normale Modelle auch, aus einem 3-Tupel $(W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$.

Die Menge der Welten W^Λ ist die Menge aller möglichen maximalen Λ -konsistenten Mengen. Betrachten wir die Aussage des Lindenbaum Lemmas, ist diese Definition leicht nachvollziehbar, denn Lindenbaums Lemma sagt ja aus, dass jede Λ -konsistente Menge Γ eine Teilmenge einer maximalen Λ -konsistenten Menge ist und somit auch Teil einer Welt w von W^Λ . Im Anschluss an diese Definition werden wir uns die Aussage des Wahrheitslemmas anschauen, welches uns zu dem Schluss bringen wird, dass jede dieser Teilmengen Γ auch in der zugehörigen Welt w erfüllbar ist.

Um die gewollte Erfüllbarkeit einer Menge Γ in einer Welt zu erhalten, definieren wir die Belegungsfunktion V^Λ indem wir einer Variablen die Menge von Welten zuordnen in denen sie wahr ist.

$$V^\Lambda(p) = \{w \in W^\Lambda \mid p \in w\}$$

Die Definition der Relation R^Λ ist dadurch definiert, dass eine Verbindung $uR^\Lambda v$ besteht, wenn für alle Formeln φ aus v gilt, dass $\diamond\varphi$ in u enthalten ist. Diese Definition der Relation nennt man auch kanonische Relation.

Da wir nun das kanonische Modell definiert haben, wollen wir das bereits erwähnte Wahrheitslemma betrachten, doch für dessen Beweis ist das Existenzlemma nötig. Zunächst schauen wir uns aber ein Lemma an, welches verdeutlicht, dass das kanonische Modell korrekt arbeitet.

Lemma Für jede normale Logik Λ gilt, wenn die Relation $wR^\Lambda v$ existiert und $\varphi, \Box\varphi \in w$ gilt, dann folgt daraus $\varphi \in v$.

Beweis Diesen Beweis wollen wir über die Kontraposition führen, d.h. wir nehmen an, es gelte $\varphi \notin v$. Da v ein Λ -MCS ist gilt $\neg\varphi \in v$.

Aus der Relation $wR^\Lambda v$ folgt, dass $\diamond\neg\varphi$ in w enthalten ist und aufgrund der Konsistenz von w gilt $\neg\diamond\neg\varphi \in w$.

Doch nun haben wir einen Widerspruch erhalten, denn $\neg\diamond\neg\varphi$ entspricht genau $\Box\varphi$ und dies soll ja in w enthalten sein.

□

Existenz Lemma Für jede normale Logik Λ und jede Welt $w \in W^\Lambda$ des kanonischen Modells gilt, dass wenn $\diamond\varphi \in w$, dann gibt es eine Welt $v \in W^\Lambda$ in der $\varphi \in v$, mit der Eigenschaft, dass es eine Relation zwischen w und v gibt ($wR^\Lambda v$).

Beweis Um das Existenzlemma zu beweisen, werden wir zuerst allgemein die geforderte Welt v konstruieren und zeigen, dass diese Welt auch konsistent ist.

Sei $v' = \{\varphi\} \cup \{\psi|w\}$ eine konsistente Menge, diese Menge erweitern wir mittels Lindenbaums Lemma zu dem Λ -MCS v , womit wir die geforderte Welt erhalten.

Es bleibt jetzt noch die Konsistenz der Menge v' zu zeigen, dazu gehen wir von der Kontraposition aus.

Angenommen v' sei nicht konsistent, dann existieren Formeln ψ_1, \dots, ψ_n , womit wir $\vdash_{\Lambda} (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow \neg\varphi$ ableiten können.

Aus dieser Ableitung können wir außerdem auf $\vdash_{\Lambda} \Box(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow \Box\neg\varphi$ schließen. Folgend können wir den Box Operator in die Und-Verknüpfung ziehen um $\vdash_{\Lambda} (\Box\psi_1 \wedge \dots \wedge \Box\psi_n) \rightarrow \Box\neg\varphi$ zu erhalten.

Da die Formeln $\Box\psi_1, \dots, \Box\psi_n$ in w enthalten sind, folgt auch $\Box\neg\varphi \in w$, woraus direkt mit der Inferenzregel Dual $\neg\Diamond\varphi \in w$ geschlossen werden kann. Dies ist aber unmöglich, da w ein Λ -MCS ist und bereits $\Diamond\varphi$ enthält.

Durch diesen Widerspruch haben wir die Konsistenz von v' und somit die Existenz von v gezeigt.

□

Nun können wir das Wahrheitslemma einführen und beweisen, welches uns die gewünschten Eigenschaften unseres kanonischen Modells bestätigt.

Wahrheitslemma Für jede normale Logik Λ und jede Formel φ gilt, dass das φ in einer Welt w des kanonischen Modells erfüllt wird, wenn φ in dieser Welt enthalten ist.

$$\mathcal{M}^{\Lambda}, w \models \varphi \quad , \text{wenn } \varphi \in w$$

Induktionsbeweis über den Aufbau von φ

Induktionsanfang

Fall 1 φ ist atomar

Ist φ atomar, dann folgt die Erfüllbarkeit direkt aus der Definition von V^{Λ} , denn φ ist erfüllt, wenn $\varphi \in w$.

Fall 2 Klassische Operatoren

Besteht φ aus klassischen Operatoren, dann folgt die Erfüllbarkeit aus den Eigenschaften maximaler Λ -konsistenter Mengen (Abschnitt 2.2.1).

Dort wird angegeben, wann eine Formel zu einer Λ -konsistenten Menge gehört und wann durch diese Formel die Menge inkonsistent wird.

Induktionsschritt

Fall 3 Modaler Operator

Zuerst führen wir den Induktionsschritt von links nach rechts aus, d.h. wir gehen davon aus, $\Diamond\varphi$ ist einer Welt w erfüllt und wir zeigen daraufhin, dass $\Diamond\varphi \in w$ gilt:
 ” \Rightarrow ”

$$\begin{array}{lcl}
 \mathcal{M}^\Lambda, w \models \Diamond\varphi & \xRightarrow{\text{Def.Wahrheit}} & \text{Es gibt eine Welt } v \text{ mit } (wR^\Lambda v \text{ und } \mathcal{M}^\Lambda, v \models \varphi) \\
 & \xRightarrow{\text{I.A.}} & \text{Es gibt eine Welt } v \text{ mit } (wR^\Lambda v \text{ und } \varphi \in v) \\
 & \xRightarrow{\text{Def.kan.Modell}} & \Diamond\varphi \in w
 \end{array}$$

In dem umgekehrten Beweis von rechts nach links gehen wir davon aus, dass $\Diamond\varphi$ in der Welt w enthalten ist und versuchen darauf zu schließen, dass $\Diamond\varphi$ auch erfüllt ist.

” \Leftarrow ”

Wenn wir einen ähnlichen Beweisweg gehen wollen wie bei der links-rechts Richtung des Beweises, dann ist der entscheidende Schritt der uns fehlt, eine maximale Λ -konsistente Menge v zu finden, mit den Eigenschaften $\varphi \in v$ und $wR^\Lambda v$. Doch genau dieses Λ -MCS erhalten wir durch das Existenzlemma.

$$\begin{array}{lcl}
 \Diamond\varphi \in w & \xRightarrow{\text{Ex.Lemma}} & \text{Es gibt eine Welt } v \text{ mit } (wR^\Lambda v \text{ und } \varphi \in v) \\
 & \xRightarrow{\text{I.A.}} & \text{Es gibt eine Welt } v \text{ mit } (wR^\Lambda v \text{ und } \mathcal{M}^\Lambda, v \models \varphi) \\
 & \xRightarrow{\text{Def.Wahrheit}} & \mathcal{M}^\Lambda, w \models \Diamond\varphi
 \end{array}$$

□

2.2.5 Beispiel: Kanonisches Modell für K4

Auf dem Weg zum ersten Vollständigkeitsresultat wollen wir uns abschließend angucken, wie ein kanonisches Modell für die normale Logik K4 aussehen könnte. Dazu betrachten wir den Grund der Transitivität des kanonischen Modell zu K4.

Dieser Grund ist auch die Erkenntnis, welche wir für den Vollständigkeitsbeweis im nächsten Kapitel brauchen, um zu zeigen, dass K4 stark vollständig für die Klasse der transitiven Rahmen ist.

Es seien $w, u, v \in W^{K4}$ mit der Eigenschaft $wR^{K4}v$ und $vR^{K4}u$.

Das Ziel ist es nun zu zeigen, dass aus diesen Vorbedingungen folgt, dass die Relation $wR^{K4}u$ existiert.

Gehen wir davon aus, dass $\varphi \in u$, dann ist durch die Relationen gegeben, dass $\Diamond\varphi \in v$ gilt. Daraus folgt aber auch, dass $\Diamond\Diamond\varphi \in w$ enthalten ist.

Soweit ist dies bei allen modalen Systemen gleich, doch nun kommt das Axiom 4 zum Tragen, welches das kanonische Modell dazu zwingt transitiv zu sein. Denn wir haben in

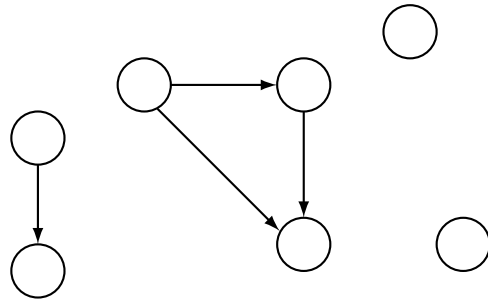


Abbildung 2: Ausschnitt eines K4 Rahmens

allen K4-MCS's die Formel $\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \varphi$ enthalten, welche nun zusammen mit $\Diamond\Diamond\varphi$ und Modus Ponens dafür sorgt, dass $\Diamond\varphi$ in w enthalten ist und wir somit die Existenz der Relation $wR^{K4}u$ gezeigt haben.

Mit dem Wissen über kanonische Modelle und deren Konstruktion können wir nun im nächsten Kapitel die ersten Vollständigkeitsbeweise führen, wobei natürlich der Beweis zu der transitiven Eigenschaft von K4 wieder aufgegriffen wird.

2.3 Vollständigkeitsresultate

Nun haben wir mit den kanonischen Modellen ein mächtiges Mittel in der Hand, um in diesem Kapitel der Arbeit einige Vollständigkeitsresultate zu führen und die Vorgehensweise bei diesen Vollständigkeitsresultaten herauszuarbeiten.

Die folgende Auflistung soll eine Übersicht über bekannte Vollständigkeitsresultate geben, wovon auch einige im weiteren Verlauf dieser Arbeit bewiesen werden.

System	Klasse aller...
K	Rahmen
K4	Transitiven Rahmen
T	Reflexiven Rahmen
B	Reflexiven Rahmen
S4	Reflexiven und Transitiven Rahmen
S5	Äquivalenzrelationen
K 4.3	Transitive Rahmen ohne Rechtsabzweigungen
S 4.3	Reflexiven Rahmen ohne Rechtsabzweigungen
KL	Finiten Transitiven Bäume

Tabelle 1: Vollständigkeitsresultate aus [?]

Als erstes werden wir uns einem sehr allgemeinen Vollständigkeitsresultat widmen, dem kanonischen Modell Theorem, welches wir aber für Vollständigkeitsbeweise immer wieder heranziehen.

2.3.1 Kanonisches-Modell-Theorem

Jede normale Logik ist streng vollständig bezüglich ihres kanonischen Modells.

Beweis Wenn man die Alternative Definition der Vollständigkeit aus Abschnitt 2.1 betrachtet, muss nur gezeigt werden, dass jede Λ -konsistente Menge mit Hilfe des kanonischen Modells erfüllbar ist. Genau dies können wir mit Hilfe des Wahrheitslemmas zeigen. Sei Σ eine Λ -Konsistente Menge, dann gilt nach dem Lindenbaum Lemma, dass es ein Λ -MCS Σ_+ gibt, welches Σ erweitert.

Mit dem Wahrheitslemma folgt:

$$\mathcal{M}^\Lambda, \Sigma_+ \models \Sigma$$

□

Als erste Anwendung dieses allgemeinen Theorems können wir nun direkt ein Vollständigkeitsresultat für die allgemeinste normale Logik K führen.

2.3.2 Vollständigkeit von K

Die normale Logik K ist stark vollständig für die Klasse aller Rahmen.

Beweis Sei Γ eine K-konsistente Menge, dann benötigen wir ein Modell M^K , welches jede K-konsistente Menge erfüllt ($M, w \models \Gamma$). Hierbei ist es nicht wichtig welcher Rahmen M zugrunde liegt, denn K soll stark vollständig für die Klasse aller Rahmen sein.

Dieses Modell ist leicht gefunden. Wir wählen einfach mit $M^K = (W^K, R^K, v^K)$ das kanonische Modell von K und die Welt w ist das erweiternde K-MCS zu Γ .

Mit dem Wahrheitslemma folgt ($M^K, w \models \Gamma$) und somit auch die starke Vollständigkeit von K zu der Klasse aller Rahmen.

□

Der Beweis zur Vollständigkeit von K ist ein recht einfacher Beweis und sein Resultat ist auch nicht weiter überraschend, doch kann man aus diesem Beweis eine sehr einfache Beweisstrategie für ein Vollständigkeitsresultat mit Hilfe von kanonischen Modellen herausziehen. Um die Strategie später besser erkennen zu können, wurde nicht auf das kanonische Modell Theorem hingewiesen, obwohl der Beweis genau diesem Theorem entspricht.

Doch bevor diese Strategie näher erläutert wird, schauen wir uns den Vollständigkeitsbeweis zu K4 an, welche, wie schon mehrfach erwähnt, die Klasse der transitiven Rahmen beschreibt.

Die Beweisstrategie wird dann durch einen Vergleich der beiden Beweise herausgearbeitet.

2.3.3 Vollständigkeit von K4

Die normale Logik K4 ist stark vollständig für die Klasse der transitiven Rahmen.

Beweis Sei Γ eine K4-konsistente Menge, nach der alternativen Vollständigkeitsdefinition (2.1), benötigen wir ein Modell M, welches jede K4-konsistente Menge erfüllt ($M^{K4}, w \models \Gamma$). Dazu wählen wir das kanonische Modell $M^{K4} = (W^{K4}, R^{K4}, V^{K4})$ und als Welt w wählen wir das erweiterte K4 MCS Γ^+ , welches wir durch das Lindenbaum Lemma erhalten. ($M^{K4}, w \models \Gamma$)

Nun müssen wir aber noch zeigen, dass das kanonische Modell von K4 auch transitiv ist. Dies haben wir schon in Beispiel 2.2.5 gesehen. Doch Vollständigkeitshalber wird dies in Kurzform noch einmal bewiesen.

Es seien $w, u, v \in W^{K4}$ mit der Eigenschaft $wR^{K4}v$ und $vR^{K4}u$, außerdem gelte $\varphi \in u$.

Aus $\varphi \in u$ folgt $\diamond\varphi \in v$ und $\diamond\diamond\varphi \in w$, mittels dem Axiom 4 ($\diamond\diamond\varphi \rightarrow \diamond\varphi$) und Modus Ponens erhalten wir $\diamond\varphi \in w$.

Also haben wir gezeigt, dass die Relation $wR^{K4}u$ besteht und somit auch, dass das kanonische Modell Transitiv ist.

□

Durch die Anwendung von kanonischen Modellen war dieser Beweis sehr einfach zu führen und das interessante an diesem Beweis ist, dass die Vollständigkeit von K4 bezüglich transitiver Rahmen nur von dem Vorhandensein des Axioms 4 abhängt.

Daraus können wir folgern, dass alle Logiken, welche K4 erweitern, ein transitives kanonisches Modell haben.

Man sagt auch Axiom 4 ist kanonisch für transitive Rahmen.

2.3.4 Beweisstrategie für Vollständigkeitsresultate mit Hilfe kanonischer Modelle

In diesem Abschnitt wollen wir die beiden bis jetzt geführten Vollständigkeitsbeweise vergleichen und aus ihnen eine allgemeine Beweisstrategie herausziehen, welche wir für weitere Vollständigkeitsresultate nutzen können.

In beiden Beweisen ist zu erkennen, dass zuerst, um die alternative Definition der Vollständigkeit (2.1) zu erfüllen, ein Modell gesucht wird, zu dem die normale Logik vollständig ist.

Es ist kein Zufall, dass bei beiden Beweisen dieses Modell das kanonische Modell ist, denn genau zu diesem Zweck haben wir das kanonische Modell eingeführt. Es macht diese Art von Vollständigkeitsbeweisen sehr angenehm.

Im Beweis zur Vollständigkeit von K4 ist aber noch ein weiterer Schritt zu erkennen, welcher im Beweis von K nicht vorhanden ist. Denn wir müssen bei K4 noch zeigen, dass das kanonische Modell auch die gewünschte Eigenschaft liefert (hier die Transitivität).

Im Beweis zu K mussten wir dies nicht zeigen, da K vollständig für alle Rahmen ist und das kanonische Modell somit keine bestimmte Eigenschaft besitzen muss.

Zusammenfassend werden bei einem Vollständigkeitsbeweis mittels kanonischer Modelle folgende zwei Schritte durchgeführt:

- (1) Aufstellen des kanonischen Modells um $M, w \models \Gamma$ für jede Λ -konsistente Menge zu erfüllen.
- (2) Nachweisen, dass das kanonische Modell auch die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Mit Hilfe dieser Beweisstrategie wollen wir nun weitere Vollständigkeitsbeweise führen.

2.3.5 Vollständigkeit von T

T ist stark vollständig für die Klasse der Reflexiven Rahmen.

Die normale Logik T erweitert K um das Axiom T ($\varphi \rightarrow \diamond\varphi$).

Beweis Wie in der Beweisstrategie angegeben, müssen wir nun als ersten Schritt das kanonische Modell M^T der normalen Logik T aufstellen. $M^T = (W^T, R^T, V^T)$. Dies kanonische Modell erfüllt natürlich jede T-Konsistente Menge Γ in der Welt Γ^+ ($M^T, \Gamma^+ \models \Gamma$). Als zweiten Schritt müssen wir nun zeigen, dass das kanonische Modell M auch reflexiv ist. Dazu sei $w \in W^T$ und es gelte $\varphi \in w$.

Nun können wir mit Hilfe des T Axioms und Modus Ponens folgern, dass $\diamond\varphi \in w$ und somit auch die Relation $wR^T w$ existiert, wodurch die Reflexivität des kanonischen Modells gezeigt ist.

□

2.3.6 Vollständigkeit von KB

KB ist stark vollständig für die Klasse der symmetrischen Rahmen.

Die normale Logik KB erweitert K um das Axiom B ($\varphi \rightarrow \Box\diamond\varphi$).

Beweis Genau wie im vorherigen Beweis müssen wir nun wieder zunächst das kanonische Modell aufstellen, doch dieser Vorgang wird sich in jedem Beweis wiederholen und ist somit trivial.

$M^{KB} = (W^{KB}, R^{KB}, V^{KB})$ sei das kanonische Modell, welches jede KB-Konsistente Menge Γ mit Hilfe des erweiterten MCS erfüllt ($M^{KB}, \Gamma^+ \models \Gamma$).

Nun bleibt zu zeigen, dass das kanonische Modell symmetrisch ist, dazu sei $w, v \in W^{KB}$ und es existiere die Relation $wR^{KB}v$, wobei $\varphi \in w$ gelte.

Nun erhalten wir mit Hilfe von B und Modus Ponens, dass $\Box\diamond\varphi \in w$ gilt. Nun da wir wissen, dass $\diamond\varphi, \Box\diamond\varphi \in w$ ergibt sich mit Lemma 2.2.4, $\diamond\varphi \in v$.

Daher existiert die Relation $vR^{KB}w$ und das kanonische Modell ist somit symmetrisch.

□

Anhand der letzten beiden Vollständigkeitsbeweise konnte man sehr gut sehen, wie leicht sich die Beweisstrategie in ein Vollständigkeitsresultat umsetzen lässt.

Des Weiteren werden in beiden Beweisen Axiome verwendet, welche das kanonische Modell zwingen eine bestimmte Eigenschaft anzunehmen, z.B. zwingt das Axiom T das Kanonische Modell zur Reflexivität.

Wie schon erwähnt, sagt man, dass T kanonisch für Reflexivität ist. Genau diesen Begriff "kanonisch" wollen wir im Folgenden noch präzisieren, bevor wir zum nächsten Teil der Arbeit übergehen und zwar von einer semantischen Fragestellung zu einer syntaktischen Beschreibung zu kommen.

2.3.7 Kanonisch für eine Eigenschaft

Definition Sei $\varphi \in Fma(\Phi)$ und P eine Eigenschaft von Rahmen. Wenn das kanonische Modell einer normalen Logik Λ mit Axiom φ die Eigenschaft P besitzt und φ gültig auf allen Rahmen mit der Eigenschaft P ist, dann heißt φ kanonisch für P .

Abschließend zu dem Abschnitt der Vollständigkeitsbeweise mit Hilfe von kanonischen Modellen soll in der nachfolgenden Tabelle noch einmal festgehalten werden, welche kanonischen Axiome bereits aufgetreten sind.

Axiom	Kanonisch für ...
4	Transitive Rahmen
T	Reflexive Rahmen
B	Symmetrische Rahmen

Im folgenden Abschnitt werden wir uns nun damit auseinander setzen, ob und wie man von einer semantischen Beschreibung einer Klasse von Rahmen auf ihre zugehörige Logik Λ schließen kann.

2.4 Von der Semantik zur normalen Logik

In diesem Kapitel wollen wir uns der Fragestellung widmen, wie man von einer semantischen Klasse von Rahmen auf ihre syntaktische Repräsentation mittels einer normalen Logik schließen kann.

Wie sich im Laufe dieser Arbeit herausstellte, ist dies schwer anschaulich in der modalen Grundsprache umzusetzen. Man könnte zwar leicht Beispiele suchen, aber diese dann wirklich korrekt zu bearbeiten, ist sehr schwierig. Zum Beispiel wäre es eine Idee, die bereits im Beispiel der Ampelschaltung (Abschnitt 1.1.3) angedeutete Eigenschaft zu verwenden, dass jede Welt eines Rahmens Teil eines 4er Zyklus sein muss. Dies hat sich jedoch als zu umständlich herausgestellt, weil die Logik sehr viele Axiome erfordert hätte.

Aus diesem Grund wird am Ende dieser Arbeit noch ein Abschnitt zur temporalen Logik eingeführt, mit welcher man dieser Fragestellung besser nachgehen kann. Die temporale Logik ist dabei eine spezifischere Version der modalen Grundsprache, es sind z.B. mehr als 2 modale Operatoren möglich, dazu aber später mehr.

Dennoch gibt es einen Weg auch in der modalen Grundsprache einfache Aussagen über semantische Fragestellungen zu geben, nämlich indem Axiome, welche kanonisch für eine Eigenschaft sind, kombiniert werden.

2.4.1 Kombination kanonischer Axiome

Im Abschnitt über Vollständigkeitsresultate wurde gezeigt, dass es Axiome gibt, welche ein kanonisches Modell dazu zwingen eine bestimmte Eigenschaft anzunehmen.

Wenn man nun mehrere dieser Axiome in einer Logik Λ vereint, kann man das kanonische Modell beliebig gestalten.

Beispiel: Klasse der reflexiven und transitiven Rahmen In diesem Beispiel wollen wir eine Logik Λ erzeugen, welche vollständig bezüglich der Klasse der reflexiven und transitiven Rahmen ist.

Aus der Tabelle 2.3.7, welche die bekannten kanonischen Axiome enthält ist ersichtlich, dass wir die Transitivität durch das Axiom 4 und die Reflexivität durch das Axiom T erhalten.

Unsere gesuchte Logik Λ besteht also aus der Grundsprache K und den Axiomen 4 und T ($\Lambda = K + 4 + T$).

Diese Logik ist auch bekannt als S4.

Beispiel: Klasse der Äquivalenzrelationen Abschließend für dieses Kapitel wollen wir noch die Klasse der Äquivalenzrelationen herausarbeiten, was wir aber direkt aus dem vorhergegangenen Beispiel tun können, denn um eine Äquivalenzrelation zu konstruieren fehlt uns zusätzlich zu S4 nur noch die Symmetrie, welche wir durch das Axiom B erhalten ($\Lambda = K + 4 + T + B$).

Diese Logik ist auch bekannt als S5.

2.5 Fazit

Dieser kurze Abschnitt schließt den Abschnitt dieser Arbeit, welcher sich mit der modalen Grundsprache beschäftigt. Wir haben in diesem Kapitel kennengelernt, wie man mit Hilfe kanonischer Modelle ein mächtiges Mittel in der Hand hat um mit einer leichten Beweissstrategie Vollständigkeitsbeweise führen zu können.

Außerdem wurde festgehalten, dass es relativ schwer ist ohne vorhanden sein von kanonischen Axiomen direkt von einer semantischen Fragestellung auf eine syntaktische Repräsentation zu schließen. Doch sobald wir kanonische Axiome zur Hand haben, kann man durch Kombination dieser Axiome sehr schnell zu Vollständigkeitsresultaten kommen.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit wollen wir nun noch einmal einen Blick auf die temporale Logik werfen und mit ihr ein semantisch getriebenes Vollständigkeitsresultat erarbeiten.

3 Temporale Logik

Zum Abschluss dieser Arbeit wollen wir den semantischen Aspekt von Vollständigkeitsresultaten noch einmal etwas näher anhand der grundlegenden Temporal Logik (kurz: Temporal Logik) betrachten.

Hierzu führen wir die nötigen semantischen und syntaktischen Erweiterungen ein, welche wir brauchen, um aus der modalen Grundsprache zu einer temporalen Logik zu gelangen. Dazu werfen wir auch einen Blick auf so genannte bidirektionale Rahmen, welche wir benötigen, um den Verlauf der Zeit darzustellen.

Nach dieser kurzen Einführung werden wir direkt einsteigen und uns ein semantisch geprägten Vollständigkeitsbeweis näher ansehen, wobei wir jedoch die Idee dieses Vollständigkeitsresultates in den Vordergrund stellen und nicht alle Beweise in aller Ausführlichkeit behandeln wollen.

3.1 Grundlagen von Temporalen Logiken

3.2 Syntax der Temporal Logik

Die Syntax der Temporal Logik entspricht weitgehend der der modalen Grundsprache, mit der Ausnahme, dass die beiden modalen Operatoren " \Box , \Diamond " nicht enthalten sind. Stattdessen wird der unäre Operator \Diamond durch die beiden, wiederum unären, Operatoren F und P ersetzt.

Desweiteren führen wir zwei Abkürzungen ein um weitere zwei unäre Operatoren zu erhalten, welche dem \Box Operator ähneln:

$$F\varphi := \neg G\neg\varphi$$

$$P\varphi := \neg H\neg\varphi$$

3.2.1 Semantik der Temporal Logik

Die Semantik von temporalen Logiken unterscheidet sich in vielerlei Hinsicht von der, der modalen Grundsprache, denn mit der Temporalen Logik wollen wir expliziert Aussagen über die Zeit ausdrücken können. Um diese Aussagen treffen zu können sind die beiden modalen Operatoren F und P definiert. Mit der Formel $F\varphi$ wollen wir Aussagen treffen wie: „ φ wird zu einem Zeitpunkt in der Zukunft wahr sein“. Analog soll die Formel $P\varphi$ „ φ war zu einem Zeitpunkt in der Vergangenheit wahr“ ausdrücken.

Die Operatoren G und H werden analog zu dem \Box Operator in der modalen Grundsprache folgend definiert:

$G\varphi$ “ φ ist zu jedem Zeitpunkt der Vergangenheit wahr”

$H\varphi$ “ φ ist zu jedem Zeitpunkt der Zukunft wahr”

Nun stellt sich die Frage, wie wir diese Aussagen über die Zeit mit mehreren modalen Operatoren treffen können. Hierzu reicht die bisher verwendete Idee einer binären Relation R nicht aus. Wir benötigen die beiden Relation R_F und R_P um die beiden Operatoren

F und P zu beschreiben. Hierzu führen wir die Definition eines bidirektionalen Rahmens ein.

Wir bilden nun einen Rahmen $\mathcal{F} = (T, R_P, R_F)$, wobei die Menge T der Menge W der Welten entspricht, nur das wir in diesem Kontext über die Zeit (Time) reden.

In genau diesem Kontext machen aber nicht alle Kombinationen von Relation R_P und R_F wirklich Sinn, denn wenn man einen zeitlichen Zusammenhang zwischen R_P und R_F herstellen will, sollten diese beiden Relationen entgegengesetzt sein. Entgegengesetzt soll bedeuten, dass für jede Relation wR_Fv eine Relation wR_Pv existiert und andersherum. Da wir nur einen Rahmen R angeben brauchen um den zweiten Rahmen exakt zu beschreiben, nennen wir den zweiten Rahmen R' .

Diese Art von Rahmen heißt bidirektional und ihre Klasse nennen wir F_t . Modelle welche auf einem bidirektionalen Rahmen aufbauen nennen wir bidirektionale Modelle und in genau diesen wollen wir temporale Formeln auswerten.

Wahrheit in bidirektionalen Rahmen Um die Wahrheit in einem bidirektionalen Rahmen zu ermitteln geht man im Prinzip genauso vor wie in einem Standard Rahmen. Aufpassen muss man jedoch, welche Relation bei welchem modalen Operator verwendet wird. Deshalb gehen wir nur auf die Wahrheit der beiden Operatoren F und P ein. Sei $M = (T, R, R', V)$ ein bidirektionalen Modell und φ eine Formel aus $Fma(\Phi)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} M, t \models F\varphi & \quad , \text{ wenn } \exists s(tRs \wedge M, s \models \varphi) \\ M, t \models P\varphi & \quad , \text{ wenn } \exists s(tR's \wedge M, s \models \varphi) \end{aligned}$$

Schauen wir uns nun die Definition der Wahrheit des Operators P an, dann können wir sehen, dass dieser einen Zeitpunkt s sucht, in welchem die Formel wahr ist und s muss auch eine Relation zu t besitzen.

Fasst man die beiden Relationen R und R' zusammen, dann würden wir folgende Definition der Wahrheit heraus bekommen, in der F vorwärts und P rückwärts die Relation R durchläuft.

An diesem Punkt ist sehr schön ersichtlich, das F in die Zukunft und P in die Vergangenheit schaut.

$$\begin{aligned} M, t \models F\varphi & \quad , \text{ wenn } \exists s(tRs \wedge M, s \models \varphi) \\ M, t \models P\varphi & \quad , \text{ wenn } \exists s(sRt \wedge M, s \models \varphi) \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis verlassen wir die Einführung in die temporale Logik. Diese kurze Einführung ist keinesfalls umfassend genug um die temporalen Logiken vollständig zu behandeln, aber es sollte nur ein kleiner Einblick geschaffen werden um uns dem eigentlichen Ziel, den semantisch orientierten Vollständigkeitsresultaten, widmen zu können.

3.3 Vollständigkeit in der Temporal Logik

In diesem Kapitel wollen wir nun die Vollständigkeit temporaler Logiken von einem semantischen Standpunkt heraus untersuchen. Ein erstes Ziel ist es ein temporales Gegenstück zu der minimalen normalen Logik K zu finden. Wir wissen, dass K vollständig für die Klasse aller Rahmen ist, also ist es im Gegenzug sinnvoll, diejenige Logik als minimale temporale Logik festzulegen, welche vollständig bezüglich der Klasse aller bidirektionalen Rahmen ist, diese Klasse wollen wir analog zu K , K_t nennen.

Folgende Definition soll diese Auffassung der minimalen temporalen Logik konkretisieren.

Definition Die minimale temporal Logik Λ_{F_t} enthält alle Formeln, welche auf bidirektionalen Rahmen gültig sind ($\Lambda_{F_t} = \{\varphi \mid F_t \models \varphi\}$).

Um nun aus dieser semantischen Charakterisierung von Λ_{F_t} eine axiomatisierte temporal Logik K_t zu konstruieren, brauchen wir wieder das Konzept der kanonischen Modelle. Kanonische Modelle in der temporalen Logik unterscheiden sich nicht stark von denen in der modalen Grundsprache, denn wir müssen nur die neu hinzugewonnene Relation berücksichtigen.

3.3.1 Definition des kanonisches Modells in temporalen Logiken

Wie in der modalen Grundsprache besteht das kanonische Modell \mathcal{M}^Λ in der temporal Logik aus einem 3-Tupel $(T^\Lambda, \{R_P^\Lambda, R_F^\Lambda\}, V^\Lambda)$.

Die Elemente des Tupels sind folgendermaßen bestimmt:

1. T^Λ ist die Menge aller Λ -konsistenten Mengen.
2. R_P^Λ ist eine binäre Relation über T^Λ , wobei $tR_P^\Lambda s$ existiert, wenn für alle Formeln $\varphi \in s$ gilt, dass $P\varphi$ in t enthalten ist.
3. R_F^Λ ist eine binäre Relation über T^Λ , wobei $tR_F^\Lambda s$ existiert, wenn für alle Formeln $\varphi \in s$ gilt, dass $F\varphi$ in t enthalten ist.
4. V^Λ ordnet jeder Variablen $p \in \Phi$ eine Menge von Zeiten folgendermaßen zu:

$$V^\Lambda(p) = \{t \in T^\Lambda \mid p \in t\}$$

Um zusammen mit dieser leicht abgewandelten Version des kanonischen Modells weiterhin leicht Vollständigkeitsbeweise führen zu können, müssten natürlich auch die Lemmata noch greifen, welche uns das kanonische Modell Theorem (2.3.1) zugesichert haben. Doch ohne den Beweis anzugeben sei gesagt, dass das Wahrheitslemma und das Existenzlemma auch in diesem temporalen Kontext ihre Gültigkeit besitzen.

3.3.2 Axiomatisierung von Λ_{F_t}

In diesem Abschnitt wollen wir nun Λ_{F_t} axiomatisieren. Hierzu wollen wir uns zunächst an der normalen Logik K aus der modalen Grundsprache orientieren, denn wir wollen ja auch die minimalste temporale Logik konstruieren.

Hierzu nehmen wir direkt die Axiome K und $Dual$ jeweils einmal für jeden modalen Operator auf, um zunächst ganz allgemein die Klasse aller Rahmen abzudecken.

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{K} & G(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \rightarrow (G\varphi_1 \rightarrow G\varphi_2) \\
 & H(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \rightarrow (H\varphi_1 \rightarrow H\varphi_2) \\
 \mathbf{Dual} & F\varphi \leftrightarrow \neg G\neg\varphi \\
 & P\varphi \leftrightarrow \neg H\neg\varphi
 \end{array}$$

Nun da wir mit K und $Dual$ die Klasse aller Rahmen abgedeckt haben, spezialisieren wir nun die Klasse, um nur noch die Klasse aller bidirektionalen Rahmen abzudecken.

In Abschnitt 3.2.1 haben wir definiert, dass ein bidirektionaler Rahmen sich dadurch auszeichnet, dass sich beide Relationen gegenteilig zueinander verhalten. Deshalb wollen wir nun noch die beiden Gegensatz Axiome einführen. Die Gegensatz Axiome verhalten sich ähnlich zu dem Axiom B , welche in der modalen Grundsprache das kanonische Modell zur Symmetrie zwingt.

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{Gegensatz} & \varphi \rightarrow GP\varphi \\
 & \varphi \rightarrow HF\varphi
 \end{array}$$

Mit der Einführung der beiden Gegensatz Axiome haben wir nun die Klasse der bidirektionalen Rahmen charakterisiert. Wir müssen nur noch zeigen, dass die Gegensatz Axiome auch das gewünschte Verhalten in dem kanonischen Modell erzeugen. Dies soll in folgendem Lemma gezeigt werden.

Bidirektionalität durch Gegensatz Axiome Für jede temporale Logik Λ gilt, wenn die Relation $tR_P^\Lambda s$ existiert, dann existiert auch die Relation $tR_F^\Lambda s$. Analog gilt diese Implikation auch in umgekehrter Richtung.

Beweis Sei $F = (T, \{R_F, R_P\})$ ein Rahmen und Λ eine temporale Logik, des Weiteren existiere die Relation $tR_P s$ für $t, s \in T$.

Sei $\varphi \in t$, dann gilt mit dem Gegensatz Axiom $\varphi \rightarrow GP\varphi$ und modus ponens $GP\varphi \in t$. Nach Lemma 2.2.4, welches auch noch im temporalen Kontext gültig ist, gilt das $P\varphi$ in s enthalten ist. Hiermit ist gezeigt, dass die Relation $tR_P s$ existiert. Analog wird die umgekehrte Richtung gezeigt.

□

3.3.3 Vollständigkeit von K_t

K_t ist stark vollständig bezüglich der Klasse der bidirektionalen Rahmen und somit gilt $K_t = \Lambda_{F_t}$

Beweis Dieser Beweis lässt sich nun wieder nach dem Schema für Vollständigkeitsbeweise führen, welches wir in dieser Arbeit kennen gelernt haben.

Wir müssen also nur zeigen, dass das kanonische Modell von K_t die gewünschten Eigenschaften liefert um die Klasse der bidirektionalen Rahmen abzudecken.

Diesen Beweis liefert uns bereits Lemma 3.3.2, womit die Vollständigkeit direkt folgt.

Mit der Vollständigkeit haben wir natürlich auch gezeigt, dass unsere semantische Charakterisierung bidirektionaler Rahmen Λ_{F_t} korrekt durch K_t axiomatisiert wird.

□

3.3.4 Fazit zu temporalen Logiken

In diesem letzten Kapitel der Arbeit haben wir gesehen, wie man mit Vollständigkeitsbeweisen eine semantische Erweiterung der modalen Grundsprache auf syntaktische Weise darstellen kann. Dies funktioniert meist sehr gut nach dem angewandtem Schema, zunächst macht man sich Gedanken dazu machen welche Axiome einem helfen könnten den Rahmen passend zu charakterisieren und anschließend muss nur noch gezeigt werden das diese Axiome auch die gewünschte Eigenschaft im kanonischen Modell erzwingen.

Als Ausblick könnte man auch noch ein weiteres temporales System axiomatisieren, nämlich das System K_tQ . Mit diesem System kann man den Fluss der real Zeit besser darstellen, da z.B. gefordert wird das zwischen zwei Zeitpunkten immer ein weiterer Zeitpunkt liegen muss.

Literatur

- [1] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal logic*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2001.
- [2] H. D. Ebbinghaus J. Flum and W.Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*. BI-Wissenschaftsverlag, 1992.
- [3] E. Rautenberg. *Einführung in die mathematische Logik*. Vieweg, 2002.