Leibniz Universität Hannover

Fakultät für Elektrotechnik und Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Bachelorarbeit

Komplexität nichtmonotoner Logiken

Vivian Holzapfel

3223460

Erstprüfer	:	Prof. Dr. Heribert Vollmer
Zweitprüfer	:	Dr. Arne Meier

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden, alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind, und die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen hat.

Hannover, den 21.3.2019

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das Thema dieser Arbeit ist die Komplexität nichtmonotoner Logiken am Beispiel der autoepistemischen und der Default Logik, basierend auf dem Paper "Complexity Results for Nonmonotonic Logics" von Georg Gottlob von 1992 [1].

Wichtigstes Merkmal nichtmonotoner Logiken sind die Expansionen/Extensionen, die, ähnlich zu bekannten monotonen Logiken, das aus Prämissen gefolgerte Wissen darstellen. Daraus ergeben sich die folgenden drei Hauptentscheidungsprobleme für nichtmonotone Logiken.

1. Das Entscheidungsproblem, ob eine Expansion/Extension existiert
2. Das Entscheidungsproblem, ob eine Formel Φ in mindestens einer Expansion/Extension enthalten ist ("Brave Reasoning")
3. Das Entscheidungsproblem, ob eine Formel Φ in allen Expansionen/Extensionen enthalten ist ("Cautious Reasoning")

Diese Entscheidungsprobleme werden für die betrachteten Logiken auf ihre Komplexität untersucht. Es lässt sich in beiden Fällen zeigen, dass die ersten beiden Entscheidungsprobleme Σ_2^P-vollständig und das dritte Π_2^P-vollständig ist.

Beginnend mit einer kurzen Übersicht über die nichtmonotone Logik im Allgemeinen, sowie die wichtigsten benötigten komplexitätstheoretischen Grundlagen, wird anschließend nacheinander auf die Logiken eingegangen. In Kapitel 4 wird die autoepistemische Logik eingeführt und die Beweise für die Komplexität der Entscheidungsprobleme über die Einordnung in die Komplexitätsklasse nach Niemelä und die Schwere in der jeweiligen Klasse nach Gottlob geführt. Im Anschluss folgt die Gleiche Zuordnung für die Default Logik. Abschließend folgen die Resultate der Arbeit.

Kapitel 2

Nichtmonotone Logik

Die bereits bekannten Logiken wie die Aussagen- oder Prädikatenlogik sind monotone Logiken. Für diese Art von Logik gilt die Monotonieeigenschaft. Wenn eine Aussage aus einer Menge von initialen Aussagen gefolgert werden kann, bleibt die Aussage der Folgerung auch erhalten wenn die Menge um weitere Aussagen erweitert wird. Genauer lässt sich dies am Beispiel der Aussagenlogik darstellen. Sei Σ eine Menge aussagenlogischer Formeln und Φ eine aussagenlogische Formel. Wenn $\Sigma \models \Phi$, dann gilt auch in jedem Fall $\Sigma \cup \Sigma' \models \Phi$, mit $\Sigma' \neq \Sigma$.
Folgt Φ aus Σ, so auch aus jeder Obermenge von Σ [2]. Zusätzliche hinzugefügte Prämissen können im Widerspruch zu bereits getroffenen Aussagen stehen. Es ist aber nicht möglich, eine einmal getroffene Aussage durch Hinzufügen widersprüchlicher Aussagen zu revidieren [2].

Beim Versuch, die monotone Logik zur Beschreibung der Logik der Alltagswelt zu verwenden, ergibt sich das Problem, dass die Schlussfolgerungen der Menschen im Allgemeinen nicht monoton sind. Bereits getroffene Aussagen können zurückgenommen werden, wenn weitere Informationen in Form von Aussagen bekannt werden [2]. Diese monotone Definition der Logik ist für die Repräsentation der Welt bzw. dem alltäglichen Sprachgebrauch daher nicht geeignet, was am folgenden Beispiel noch einmal deutlich wird.

Beispiel 2.1.
Es wird eine Pokerrunde betrachtet, bei der es am Ende des Spiels einen Gewinner gibt. Aus der Aussage, dass Spieler X gewonnen hat, wird zuerst gefolgert, dass es sich um einen guten Pokerspieler handelt.

$$\textit{\textbf{Spieler X gewinnt}} \Rightarrow \textit{\textbf{Spieler X ist ein guter Spieler}}$$

Wenn aber später bekannt wird, dass Spieler X betrogen hat, wird diese Annahme durch die Annahme ersetzt, dass Spieler X nur durch Betrug und nicht durch Können gesiegt hat.

$$\textit{\textbf{Spieler X gewinnt}} \wedge \textit{\textbf{Spieler X betrügt}} \Rightarrow \textit{\textbf{Spieler X gewinnt nur durch Betrug}}$$

Um solche Sachverhalte beschreiben zu können, werden daher nichtmonotone Logiken genutzt. Hierbei ist es möglich, eine initiale Teilmenge von Informationen durch mit der Zeit gelernte Informationen zu erweitern und bereits getroffene Aussagen zu spezifizieren oder zu verwerfen und neue Annahmen zu treffen. In dieser Darstellungsform gibt es nun jedoch nicht mehr nur eine Menge von logischen Konsequenzen, sondern mehrere mögliche Wissens- bzw. Glaubensmengen, die auf Basis der initialen Aussagenmenge angenommen werden können. Diese Mengen werden durch die Extensionen bzw. Expansionen der nichtmonotonen Logiken dargestellt [2].

Kapitel 3

Komplexitätstheoretische Grundlage

Grundlage für die komplexitätstheoretische Einordnung ist die angenommene Struktur zwischen PSPACE und NP, die Polynomialzeithierarchie (PH). Dabei handelt es sich um die bekannte Klasse NP mit Orakel [1]. Ein Orakel für eine Klasse von Entscheidungsproblemen C kann jedes Problem aus C in einem Schritt entscheiden. Daraus ergeben sich die Klassen P^{C}, bzw. NP^{C}, die die Entscheidungsprobleme enthalten, welche in (nichtdeterministischer) Polynomialzeit mit Orakelaufrufen an ein C-Orakel gelöst werden können [1].

Die Klassen der Polynomialzeithierarchie sind wie folgt rekursiv definiert.
Auf dem nullten Level (k=0) gilt

$$\Delta_0^P = \Sigma_0^P = \Pi_0^P = \mathrm{P}$$

Danach werden die Klassen des k-ten Levels $\forall k \geq 0$ über

$$\begin{aligned}\Delta_{k+1}^P &= \mathrm{P}^{\Sigma_k^P}\\ \Sigma_{k+1}^P &= \mathrm{NP}^{\Sigma_k^P}\\ \Pi_{k+1}^P &= \text{co-}\Sigma_{k+1}^P\end{aligned}$$

bestimmt [1].
Die Probleme der Klasse Δ_{k+1}^P lassen sich durch einen deterministischen Polynomialzeitalgorithmus mit Aufrufen an ein Σ_k^P-Orakel lösen, die der Klasse Σ_{k+1}^P mit einen nichtdeterministischen Polynomialzeitalgorithmus [1]. Die Klasse Π_{k+1}^P enthält diejenigen Probleme, deren Komplementärproblem in Σ_{k+1}^P liegt [1].

Die bereits bekannten Klassen NP und co-NP bilden das erste Level der Polynomialzeithierarchie [1].

$$\begin{aligned}\mathrm{NP} &= \Sigma_1^P\\ \text{co-NP} &= \Pi_1^P\end{aligned}$$

Das für diese Arbeit wichtigste Problem ist das der Quantifizierten Booleschen Formeln (QBF). Ähnlich zum Satisfiability Problem SAT wird hier eine quantifizierte boolesche Formel auf Erfüllbarkeit geprüft.
Dies sind aussagenlogische Formeln E aus den atomaren Variablen p_i und q_i für $1 \leq i \leq n$ mit den zusätzlichen Quantoren $\forall$ und $\exists$. Die hier relevanteste ist $\mathrm{QBF}_{2,\exists}$, die Menge aller quantifizierten booleschen Formeln der Form $Q = \exists p_1 ... \exists p_n \forall q_1 ... \forall q_m \mathrm{E}$. Q ist eine gültige $\mathrm{QBF}_{2,\exists}$, wenn eine Wahrheitsbelegung für die p_i existiert, sodass E für alle q_i erfüllt ist [1].
Das Entscheidungsproblem $\mathrm{QBF}_{2,\exists}$ ist Σ_2^P-vollständig.

Die Komplexität des Problems ist abhängig von der Struktur der Formel, genauer der Reihenfolge der Quantoren. Das folgende Schaubild zeigt, in welcher Form die QBF in welcher Klasse vollständig ist. Außerdem zeigt es die Polynomialzeithierarchie und die Beziehung zwischen den Klassen, wobei die Pfeile für Inklusion stehen.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \vdots & & \\
\exists\forall\exists & \Sigma_3^P & & \Pi_3^P & \forall\exists\forall \\
 & & \Delta_3^P \arrow[ul] \arrow[ur] & & \\
\exists\forall & \Sigma_2^P \arrow[uu] \arrow[ur] & & \Pi_2^P \arrow[uu] \arrow[ul] & \forall\exists \\
 & & \mathrm{P}^{\mathrm{NP}} = \Delta_2^P \arrow[ul] \arrow[ur] & & \\
\exists & \mathrm{NP} = \Sigma_1^P \arrow[uu] \arrow[ur] & & \Pi_1^P = \mathrm{coNP} \arrow[uu] \arrow[ul] & \forall \\
 & & \Delta_0^P = \Sigma_0^P = \mathrm{P} = \Pi_0^P = \Delta_1^P \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 3.1: Polynomialzeithierarchie [3]

Allgemein lässt sich sagen, dass QBF_k Σ_k^P-vollständig ist, wenn die Quantoren alternierend mit $\exists$ beginnen und Π_k^P-vollständig, falls sie mit $\forall$ beginnen [4]. Ein Problem befindet sich auf dem k-ten Level der Polynomialzeithierarchie, wenn es Element von Δ_{k+1}^P und es zusätzlich Σ_k^P-/Π_k^P-schwer ist [1].

Kapitel 4

Autoepistemische Logik

4.1 Einführung

Die erste betrachtete nichtmonotone Logik ist die Autoepistemische Logik nach Moore. Sie unterscheidet sich von der klassischen Aussagenlogik dadurch, dass sie die Möglichkeit bietet, zusätzliche Aussagen über Wissen und Nichtwissen darzustellen. Die Sprache der Aussagenlogik besteht aus den syntaktischen Operatoren $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, sowie den Konstanten $\top$ für wahr und $\perp$ für falsch. Die autoepistemische Logik erweitert diese Definition um einen zusätzlichen introspektiven modalen Operator L. Dieser drückt aus, dass eine folgende Aussage geglaubt wird [1]. Die Sprache der autoepistemischen Logik wird als $\mathcal{L}_{\text{ae}}$ bezeichnet. Hauptaufgabe der Logik ist es für einen idealen rationalen Agenten und seine initiale Menge an Annahmen seine Menge von daraus folgenden Beliefs (Glaubensvorstellungen) zu finden. Diese Menge wird als Wissensbasis des Agenten bezeichnet [1]. Für eine aussagenlogische Formel Φ, die ebenfalls L enthalten kann, steht der Ausdruck $L\Phi$ dafür, dass die Formel Φ in der Wissensbasis von $\mathcal{L}_{\text{ae}}$ liegt. Es wird also angenommen, dass Φ geglaubt wird. Andererseits kann durch $\neg L\Phi$ ausgedrückt werden, dass Φ nicht in der Wissensbasis liegt, also nicht bekannt ist.

Aus der Rationalität des Agenten folgt, dass diejenigen Beliefs, die aus der logischen Konsequenz der initialen Annahmen und den Beliefs aus der aktuellen Wissensbasis folgen, ebenfalls in der Wissensbasis enthalten sein müssen. Daraus folgt auch, dass wenn Φ ein Belief der Wissensbasis ist, so ist auch $L\Phi$ einer, sowie wenn Φ kein Belief ist, ist $\neg L\Phi$ einer [5]. Intuitiv bedeutet dies, dass wenn eine Formel Φ nicht in der Wissensbasis ist, die Aussage darüber, dass sie nicht geglaubt wird, enthalten sein muss.
Da der Agent außerdem ideal ist, sind auch alle Beliefs, die nach logischer Konsequenz aus der Wissensbasis folgen, ebenfalls in der Wissensbasis [5].

Beispiel 4.1.
Betrachtet wird das folgende Szenario einer Freundesgruppe des rationalen Agenten, bestehend aus Personen A, B und C. Dabei wird die Wissensbasis auf die folgende Art gebildet. Der Agent kennt A, B und C, daher sind `kennt(A)`, `kennt(B)` *und* `kennt(C)` *in der Wissensbasis, sowie auch* `Lkennt(A)`, `Lkennt(B)` *und* `Lkennt(C)`, *da* `kennt` $\rightarrow$ `Lkennt` *gilt. Der Agent glaubt auch diese Personen zu kennen. Für eine weitere Person D ist* $\neg$ `Lkennt(D)` *in der Wissensbasis. Es wird nicht geglaubt, dass D gekannt wird auf der Basis, dass der Agent davon wüsste, wenn er D kennen würde.*

Die autoepistemische Logik basiert auf der Aussagenlogik. Daher lassen sich die bekannten Operation auch für die autoepistemische Logik definieren. Grundlegend dafür sei $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\text{ae}}$ definiert als die endliche Menge der initialen Prämissen. Für eine beliebige Menge $\Delta \subseteq \mathcal{L}_{\text{ae}}$ gilt außerdem

$$L(\Delta) = \{L\Phi \mid \Phi \in \Delta\}$$

als die Menge aller geglaubten Formeln Φ ausgehend von den in Δ enthaltenen Formeln [1]. Die Negation dieser Menge wird über

$$\neg\Delta = \{\neg\Phi \mid \Phi \in \Delta\}$$

definiert, sowie das Komplement als

$$\bar{\Delta} = \mathcal{L}_{\text{ae}} - \Delta$$

[1].

Definition 4.1.
Die semantische Folgerung $\models$ wird für die autoepistemische Logik erweitert, sodass für eine Prämissenmenge $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{ae}$ und eine Formel $\Phi \in \mathcal{L}_{ae}$ gilt $\Sigma \models \Phi$ gdw. Φ in jeder möglichen Belegung die Σ erfüllt, ebenfalls erfüllt ist [1].

Das rekursive Prinzip für die Folgerung in der Aussagenlogik kann hierbei, mit dem Zusatz, $L\Phi$ als atomare Formel anzusehen, auf die Autoepistemische Logik übertragen werden [1]. Daher kann auch $L\Phi$ mit einem Wahrheitswert belegt werden.

Definition 4.2.
*Die Implikation wird mit dem Operator **cons** als*

$$cons(\Delta) = \{\Phi \mid \Delta \models \Phi\}$$

für alle $\Delta \subseteq \mathcal{L}_{ae}$ definiert [1].

Außerdem gilt eine Menge Σ als konsistent bzw. widerspruchsfrei, wenn mindestens eine Belegung existiert, für die alle Formeln in Σ erfüllt sind.

4.2 Stabile Expansion

Einer der wichtigsten Begriffe der nichtmonotonen Logik, sowie der Fokus autoepistemischen Logik sind die stabilen Expansionen einer initialen Prämissenmengen. Dabei handelt es sich um die Menge der möglichen korrekten Schlussfolgerungen bzw. der möglichen Beliefs, die der Agent auf Grundlage der initialen Prämissenmenge annehmen kann [1]. Manche Prämissenmengen können mehrere stabile Expansionen haben. Genauso ist es möglich, dass es überhaupt keine stabile Expansion gibt, aus der Prämissenmenge also nichts geschlussfolgert werden kann. Dies gilt z. B. für $\{L\Phi\}$ [1].
Bei einer Expansion Δ handelt es sich um eine stabile Expansion, wenn die folgenden Bedingungen gelten: [6]

$$\varphi \in \Delta \Rightarrow L\varphi \in \Delta$$
$$\varphi \notin \Delta \Rightarrow \neg L\varphi \in \Delta$$

Das Ziel ist es zu prüfen, ob für eine Prämissenmenge $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\text{ae}}$ stabile Expansionen existieren und diese alle zu finden bzw. zu definieren.
Zusätzlich zu dieser informellen Definition lassen sich stabile Expansionen auch mathematisch über die folgende Fixpunktgleichung definieren.

Definition 4.3 (Moore [7])**.**
Δ ist eine stabile Expansion von Σ gdw. die Fixpunktgleichung

$$\Delta = cons(\Sigma \cup L(\Delta) \cup \neg L(\bar{\Delta}))$$

erfüllt ist.

Bei den stabilen Expansionen handelt es sich immer um unendliche Mengen. Beispielsweise sei Δ eine stabile Expansion. Wenn $\Phi \in \Delta$, dann folgt nach Definition auch $L\Phi \in \Delta, LL\Phi \in \Delta$ usw. Es ist daher für die Beweisführung nötig, stabile Expansionen finitisch zu charakterisieren [5]. Die hierfür am besten geeignete Charakterisierung ist die von Niemelä [5]. Diese benutzt einen modalen Kern der Prämissenmenge Σ, der aus der Untermenge aller Subformeln von Σ der Form $L\Phi$ und $\neg L\Phi$ besteht.

Definition 4.4 (Niemelä [5])**.**
*Die **Subformeln** von Σ der geforderten Form $L\Phi$ werden mit $Sf^L(\Sigma)$ bezeichnet.*
*Der **modale Kern** kann dann als $Lbase(\Sigma) = Sf^L(\Sigma) \cup \neg Sf^L(\Sigma)$ definiert werden und erhält zusätzlich die negierte Form der Subformeln.*

Zur weiteren Charakterisierung dieser Menge wird der Begriff der Σ-Vollständigkeit eingeführt.

Definition 4.5 (Niemelä [5])**.**
*Sei Σ eine Menge von Prämissen. Eine Teilmenge Λ des modalen Kerns $Lbase(\Sigma)$ ist **Σ-vollständig** gdw. die folgenden Bedingungen für jedes $L\Phi \in Sf^L(\Sigma)$ gelten.*

1. $\Sigma \cup \Lambda \models \Phi \Leftrightarrow L\Phi \in \Lambda$
2. $\Sigma \cup \Lambda \not\models \Phi \Leftrightarrow L\Phi \notin \Lambda$

Als Σ-vollständig werden folglich diejenigen Teilmengen des Kerns bezeichnet, aus denen sich, wenn vereinigt mit der initialen Prämissenmenge, eine Formel Φ genau dann ableiten lässt, wenn sie in Λ geglaubt wird.

Beispiel 4.2.
Sei $\Sigma = \{Lp \leftrightarrow p\}$.
Dann ist $Sf^L(\Sigma) = \{Lp\}$ *und* $\neg Sf^L(\Sigma) = \{\neg Lp\}$ *und* $Lbase(\Sigma) = \{Lp, \neg Lp\}$.
Sei $\Lambda = \{Lp\} \subseteq Lbase(\Sigma)$.
Für alle $L\Phi \in Sf^L(\Sigma)$ *werden die Bedingungen aus Def. 4.5 geprüft.*
Nach (1) in Def. 4.5 muss nun $\Sigma \cup \Lambda \models p$ *gelten, da* $Lp \in \Lambda$.

$$\{Lp \leftrightarrow p\} \cup \{Lp\} \models p$$

$$\Leftrightarrow \{Lp \leftrightarrow p, Lp\} \models p$$

Damit alle Formeln in $\{Lp \leftrightarrow p, Lp\}$ *erfüllt sind, muss* $Lp = 1$ *sein, daraus folgt mit* $Lp \leftrightarrow p$, *dass auch* $p = 1$ *ist, also ist (1) erfüllt.*
(2) Wenn $Lp \notin \Lambda$, *fehlt die Bedingung, die für* $Lp \leftrightarrow p$ *die Belegung* $Lp = 1$ *und* $p = 1$ *erzwingt. Sie ist also auch mit* $Lp = 0$ *und* $p = 0$ *erfüllt.*
$\Rightarrow \Sigma \cup \Lambda \not\models p$ Λ *ist also* Σ*-vollständig.*

Es gilt nun, diese Definition von Σ-vollständigen Mengen mit stabilen Expansionen in Verbindung zu bringen.

Behauptung 4.1 (Niemelä [5])**.**
Für jede Prämissenmenge Σ *gibt es einen injektiven Zusammenhang zwischen den stabilen Expansionen von* Σ *und den* Σ*-vollständigen Mengen.*
Sei E die korrespondierende Expansion zu einer Σ*-vollständigen Menge* Λ, *so gilt*

$$\Lambda = Lbase(\Sigma) \cap (\{L\Phi \mid \Phi \in E\} \cup \{\neg L\Phi \mid \Phi \notin E\}).$$

Definition 4.6 (Gottlob [1])**.**
Die zu einer Σ*-vollständigen Menge* Λ *zugehörige stabile Expansion wird mit* $\boldsymbol{SE_\Sigma(\Lambda)}$ *bezeichnet.* Λ *entspricht dann dem Kern von* $SE_\Sigma(\Lambda)$.

Beispiel 4.3.
Sei $\Sigma = \{Lp \rightarrow p\}$.
$Sf^L(\Sigma) = \{Lp\}$, $\neg Sf^L(\Sigma) = \{\neg Lp\}$
$Lbase(\Sigma) = Sf^L(\Sigma) \cup \neg Sf^L(\Sigma) = \{Lp\} \cup \{\neg Lp\} = \{Lp, \neg Lp\}$
Die möglichen Mengen $\Lambda \subseteq Lbase(\Sigma)$ *sind* $\{Lp\}, \{\neg Lp\}, \{Lp, \neg Lp\}$.
Diese werden nach Def. 4.5 auf Σ*-Vollständigkeit geprüft.*

$\Lambda = \{Lp\}$

$$\Sigma \cup \Lambda \models p \Leftrightarrow Lp \in \Lambda$$
$$\{Lp \rightarrow p, Lp\} \models p \Leftrightarrow Lp \in \Lambda$$

Damit $\{Lp \rightarrow p, Lp\}$ *erfüllt ist, muss* $Lp = 1$ *sein, damit dann* $Lp \rightarrow p$ *erfüllt, muss* $p = 1$ *sein, also gilt die Folgerung.*

$\Lambda = \{\neg Lp\}$

$$\Sigma \cup \Lambda \models p \Leftrightarrow \neg Lp \in \Lambda$$
$$\{Lp \rightarrow p, \neg Lp\} \models p \Leftrightarrow \neg Lp \in \Lambda$$

Damit $\{Lp \rightarrow p, \neg Lp\}$ *erfüllt ist, muss* $\neg Lp = 1 \Rightarrow Lp = 0$. *Damit* $\{Lp \rightarrow p\}$ *erfüllt ist, kann sowohl* $p = 1$, *als auch* $p = 0$ *sein.*
$\Rightarrow \{Lp \rightarrow p, \neg Lp\} \not\models p$

Die einzige Σ*-vollständige Menge ist* $\{Lp\}$. *Die zu diesem Kern gehörige stabile Expansion ist die einzige Expansion von* Σ.

4.3 Die drei Hauptentscheidungsprobleme für die autoepistemische Logik

Wie schon in Abschnitt 1 erwähnt, ergeben sich für nichtmonotone Logiken drei Hauptentscheidungsprobleme.

1. Entscheidung, ob eine Prämissenmenge Σ eine stabile Expansion hat
2. Entscheidung, ob eine Formel Φ in mindestens einer stabilen Expansion von Σ enthalten ist ("Brave Reasoning")
3. Entscheidung, ob Φ in allen stabilen Expansionen von Σ enthalten ist ("Cautious Reasoning")

Diese Entscheidungsprobleme sollen nun für die autoepistemische Logik in die Komplexitätshierarchie eingeordnet werden. Auf Grundlage der finitischen Charakterisierung und dem festgestellten injektiven Zusammenhang zwischen Σ-Vollständigkeit und stabilen Expansionen lassen sich für die drei Hauptentscheidungsprobleme zuerst einmal obere Schranken setzen beziehungsweise die Zugehörigkeit zu ihren jeweiligen Komplexitätsklassen zeigen. Diese bilden die Grundlage um später die Vollständigkeit zu beweisen.
Im vorherigen Abschnitt wurde bereits der Zusammenhang zwischen den stabilen Expansionen und Σ-vollständigen Mengen definiert. Auf Grundlage dessen muss zuerst die Komplexität der Überprüfung auf Σ-Vollständigkeit geklärt werden. Dabei macht Niemelä ([5]) die folgenden Behauptungen.

Behauptung 4.2 (Niemelä [5])**.**
Es kann in Δ_2^P geprüft werden, ob eine Menge Λ Σ-vollständig ist.

Um zu testen, ob ein $\Lambda \subseteq Lbase(\Sigma)$ Σ-vollständig ist, reicht es die Bedingungen aus Def. 4.5 zu prüfen. Also

1. $\Sigma \cup \Lambda \models \Phi \Leftrightarrow L\Phi \in \Lambda$
2. $\Sigma \cup \Lambda \not\models \Phi \Leftrightarrow L\Phi \notin \Lambda$

Der Test einer aussagenlogischen Implikation ist co-NP-vollständig. Das Komplementärproblem, ob eine aussagenlogische Implikation nicht gilt, liegt nach Definition von co-NP in NP. Es kann deswegen die zweite Bedingung, der Test, ob die Implikation nicht gilt, mit einem Aufruf an ein NP-Orakel geprüft werden.
Wenn Σ nun aus maximal n Symbolen besteht ergeben sich daraus für $Sf^L(\Sigma)$ ebenfalls maximal n Symbole. Da außerdem $|Sf^L(\Sigma)| = |\neg Sf^L(\Sigma)| \leq n$, gilt für

$$|Lbase(\Sigma)| = |Sf^L(\Sigma)| + |\neg Sf^L(\Sigma)| \leq 2n.$$

Da $\Lambda \subseteq Lbase(\Sigma)$, folgt auch für $|\Lambda| \leq 2n$ und somit für den Test, ob Λ Σ-vollständig ist, maximal $2n$ Prüfungen der Implikationen, also maximal $2n$ Aufrufe des NP-Orakels. Damit kann die Überprüfung, ob eine Menge Λ Σ-vollständig ist, von einem Polynomialzeitalgorithmus mit NP-Orakel gelöst werden und liegt somit in $\mathrm{P}^{\mathrm{NP}} = \Delta_2^P$. Mit diesem Ergebnis lässt sich nun die folgende Behauptung aufstellen.

Behauptung 4.3 (Niemelä [5]).
Das Entscheidungsproblem, ob eine Prämissenmenge Σ eine stabile Expansion hat liegt in Σ_2^P.

Zum Beweis der Behauptung kann einfach nichtdeterministisch eine Menge $\Lambda \subseteq Lbase(\Sigma)$ als Kern einer möglichen stabilen Expansion geraten und auf Σ-Vollständigkeit geprüft werden. Aus dem obigen Resultat folgt dabei, dass die Überprüfung auf Σ-Vollständigkeit in Δ_2^P liegt. Ausgehend von den oben getroffenen Annahmen kann sich das Problem der Existenz von Expansionen also nichtdeterministisch auf das Problem der Prüfung aussagenlogischer Implikationen Turing-reduzieren lassen. Das Problem liegt also in $\mathrm{NP}^{\Sigma_1^P} = \mathrm{NP}^{\mathrm{NP}} = \Sigma_2^P$.
Das zweite betrachtete Problem ist das des "Brave Reasoning" bzw. der Entscheidung, ob eine Formel Φ in mindestens einer Expansion enthalten ist, gegeben eine Prämissenmenge Σ. Intuitiv wird dabei geprüft, ob eine bekannte Formel in einer möglichen Menge an geglaubten Formeln enthalten ist.
Zuerst muss es eine Möglichkeit geben zu prüfen, ob $\Phi \in SE_\Sigma(\Lambda)$. Dafür wird der Begriff der Quasi-Subformeln $Sf^q(\Phi)$ von Φ benötigt. Diese entsprechen den vorher bereits definierten Subformeln mit der Ausnahme, dass alle Formeln der Form $L\Psi$ keine weiteren Subformeln besitzen. Niemelä macht folgende Behauptung.

Behauptung 4.4 (Niemelä [5]).
Gegeben Prämissenmenge Σ, Σ-vollständige Menge Λ und eine Formel $\Phi \in \mathcal{L}_{ae}$, dann gilt

$$\Phi \in SE_\Sigma(\Lambda) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \Sigma \cup \Lambda \cup \\ \{L\Psi \mid L\Psi \in Sf^q(\Phi) \wedge \Psi \in SE_\Sigma(\Lambda)\} \cup \\ \{\neg L\Psi \mid L\Psi \in Sf^q(\Phi) \wedge \Psi \notin SE_\Sigma(\Lambda)\} \end{array}\right\} \models \Phi$$

Mit dieser Behauptung kann das Problem gelöst werden, indem die Implikation rekursiv für alle Formeln der Form $L\Psi$ von Φ und zusätzlich auch für Φ selbst geprüft wird. Da die Anzahl der Subformeln durch die Anzahl der Symbole in Φ begrenzt ist, ist dieses Problem, wie auch schon bei der Überprüfung auf Σ-Vollständigkeit gezeigt, in Δ_2^P lösbar. Diese Ergebnisse können nun zum Lösen des "Brave Reasoning" verwendet werden.

Behauptung 4.5 (Niemelä [5]).
Das Entscheidungsproblem, ob eine Formel Φ in mindestens einer stabilen Expansion von Σ enthalten ist, liegt in Σ_2^P.

Die Idee hier ist es, wie schon für die Existenz von Expansionen, eine mögliche Untermenge $\Lambda \subseteq Lbase(\Sigma)$ zu raten und mit Def. 4.5 auf Σ-Vollständigkeit zu prüfen. Im positiven Fall handelt es sich dann bei Λ um den Kern einer stabilen Expansion. Um nun festzustellen, ob Φ in dieser Expansion enthalten ist, reicht es die Bedingung für $\Phi \in SE_\Sigma(\Lambda)$ aus Behauptung 4. 4 zu prüfen. Dieses Problem kann wie für Beh. 4.3 über eine nichtdeterministische Turing-Reduktion auf aussagenlogische Implikation mit einer polynomiellen Anzahl Aufrufe an ein NP-Orakel, welches Implikationen prüft, realisiert werden.
Das "Brave Reasoning" Problem liegt also in $\mathrm{NP}^{\Sigma_1^P} = \mathrm{NP}^{\mathrm{NP}} = \Sigma_2^P$.

Das letzte Problem ist zu prüfen, ob eine Formel Φ Element aller stabilen Expansionen einer Prämissenmenge ist, also in allen Fällen wahr ist.

Behauptung 4.6 (Niemelä [5]).
Das Entscheidungsproblem, ob Φ in allen stabilen Expansionen von Σ enthalten ist, liegt in Π_2^P.

Wenn diese Behauptung gilt, gibt es keine Expansion, die Φ nicht enthält. Es ist einfacher dieses Komplexitätsproblem zu betrachten und zu prüfen, ob eine solche Expansion existiert. Dies geschieht ähnlich wie auch schon beim "Brave Reasoning", indem eine mögliche Menge Λ geraten und dann auf Σ-Vollständigkeit geprüft wird. Für die zugehörige Expansion wird dann nichtdeterministisch geprüft, ob Φ enthalten ist. Diese Überprüfung kann durch eine, in der Länge von Φ polynomielle, Anzahl Aufrufe eines NP-Orakels realisiert werden. Daraus folgt, dass das Komplementärproblem in Σ_2^P und damit das Problem des "Cautious Reasoning" in Π_2^P liegt.

4.4 Vollständigkeitsbeweise

Nachdem die Zugehörigkeit der drei Probleme zu den Komplexitätsklassen festgestellt wurde, stellt sich nun die Frage, ob sie darin auch vollständig sind. Dafür muss zusätzlich die Schwere geprüft werden. Nach Definition ist ein Problem Σ_2^P-schwer, wenn sich ein bekannt Σ_2^P-schweres Problem darauf reduzieren lässt. Hierfür eignet sich das zuvor in Kapitel 2 eingeführte QBF Problem. Dabei handelt es sich um das Erfüllbarkeitsproblem für quantifizierte boolesche Formeln, also aussagenlogische Formeln die zusätzliche Quantoren enthalten. Es ist äquivalent zum Satisfiability Problem SAT, dem Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln, definiert.

$$QBF := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ ist erfüllbare quantifizierte aussagenlogische Formel } \}$$

4.4.1 Existenzproblem

Satz 4.1 (Gottlob [1]).
Das Entscheidungsproblem ob eine Prämissenmenge Σ eine stabile Expansion hat ist Σ_2^P-vollständig.

Beweis.

1. $\in \Sigma_2^P$
   Folgt aus Beh. 4.3.

2. Σ_2^P-Schwere
   Der Beweis wird über die Reduktion von $\text{QBF}_{2,\exists}$, einem bekannt Σ_2^P-vollständigen Problem, geführt. Dafür sei $Q = \exists p_1 ... \exists p_n \forall q_1 ... \forall q_m \text{E}$ eine beliebige Formel in $\text{QBF}_{2,\exists}$, wobei E eine aussagenlogische Formel bestehend aus den atomaren Formeln $p_1, ..., p_n$ und $q_1, ..., q_m$ ist.
   Als Reduktionsfunktion wird

   $$f(Q) = \Sigma = \{p_1 \leftrightarrow Lp_1, ..., p_n \leftrightarrow Lp_n, L\text{E}\} \tag{1}$$

   gewählt.
   Die Funktion kann in Polynomialzeit berechnet werden, da nur die Formel Q überlaufen und die benötigten Subformel extrahiert werden müssen.
   Es muss für eine quantifizierte boolesche Formel Q und die Prämissenmenge Σ also gelten:

   $$Q \text{ ist gültige } \text{QBF}_{2,\exists} \Leftrightarrow f(Q) = \Sigma \text{ besitzt eine stabile Expansion}$$

   "$\Leftarrow$"
   Angenommen $f(Q) = \Sigma$ besitzt eine stabile Expansion Δ.
   Mit einer Fallunterscheidung lässt sich zeigen, dass aus dieser Aussage für alle möglichen Expansionen Δ folgt, dass es sich bei Q um eine gültige $\text{QBF}_{2,\exists}$ handelt.

   1. Fall
   Zuerst gilt es den Sonderfall, dass Δ der inkonsistenten Expansion $\mathcal{L}_{\text{ae}}$, also der gesamten Sprache der autoepistemischen Logik, entspricht, zu beachten. Durch Widerspruchsbeweis kann gezeigt werden, dass dieser Fall vernachlässigbar ist.
   Angenommen $\Delta = \mathcal{L}_{\text{ae}}$, dann wäre $\bar{\Delta} = \emptyset$, da es sich bei Δ schon um die gesamte Sprache handelt.

Nach Definition 3.4 für stabile Expansionen ist die Voraussetzung dafür, dass Δ eine stabile Expansion ist, dass

$$\Delta = cons(\Sigma \cup L(\Delta) \cup \neg L(\bar{\Delta}))$$

gilt.
Mit $\bar{\Delta} = \emptyset$ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\Delta = cons(\Sigma \cup L(\Delta)).$$

Der Widerspruch lässt sich nun über die Konsistenz zeigen.
Wenn die Menge $\Sigma \cup L(\Delta)$ konsistent ist, folgt auch, dass Δ konsistent ist. Prüfe nun, ob die Menge $\Sigma \cup L(\Delta)$ konsistent ist. Dafür muss jeder atomaren Variable in $\mathcal{L}_{\text{ae}}$ der Wahrheitswert "wahr" zugewiesen und anschließend auf Widerspruch geprüft werden. Für $\Sigma = \{p_1 \leftrightarrow Lp_1, ..., p_n \leftrightarrow Lp_n, L\text{E}\}$ folgt automatisch, dass die Äquivalenzen alle erfüllt sind, der übrigen atomaren Formel LE wird sowieso "wahr" zugewiesen. Gleiches gilt für $L(\Delta)$, da die Menge nur aus atomaren Formeln der Form $L\varphi$ besteht. Also folgt $\Sigma \cup L(\Delta)$ konsistent. Dann muss nach

$$\Delta = cons(\Sigma \cup L(\Delta))$$

auch gelten, dass Δ konsistent. Da nach Annahme $\Delta = \mathcal{L}_{\text{ae}}$, aber $\mathcal{L}_{\text{ae}}$ inkonsistent ist ergibt sich ein Widerspruch. $\lightning$ Damit muss $\Delta \neq \mathcal{L}_{\text{ae}}$ gelten.

2. Fall

Nachdem der Sonderfall ausgeschlossen wurde, kann der 2. Fall wie Δ aufgebaut sein kann betrachtet werden. Für die stabile Expansion Δ gilt aufgrund von Def. 4.3, dass $\Sigma \subset \Delta$. Nach der Reduktionsfunktion ist $\Sigma = \{Lp_1 \leftrightarrow p_1, ..., Lp_n \leftrightarrow p_n, L\text{E}\}$. Δ muss demnach LE und für alle $1 \leq i \leq n$ $Lp_i \leftrightarrow p_i$ enthalten. Außerdem gilt für alle $1 \leq i \leq n$ entweder $Lp_i \in \Delta$ oder $\neg Lp_i \in \Delta$, da eine Formel p_i nicht gleichzeitig als "wahr" geglaubt und nicht bekannt sein kann, ob sie als wahr geglaubt wird. Aufgrund der Definition einer **stabilen** Expansion, folgt für $L\text{E} \in \Delta$, dass auch $\text{E} \in \Delta$. Da Δ unter Implikation abgeschlossen ist, folgt daraus zusätzlich, dass entweder $p_i \in \Delta$ oder $\neg p_i \in \Delta$.
Für den Kern Λ der nach Behauptung 4.1 mit der stabilen Expansion Δ korrespondiert gilt,

$$\Lambda = Lbase(\Sigma) \cap (\{L\Phi \mid \Phi \in \Delta\} \cup \{\neg L\Phi \mid \Phi \notin \Delta\})$$

Mit der Definition 4.4 für Lbase ergibt sich

$$\begin{aligned} & Lbase(\Sigma) = Sf^L(\Sigma) \cup \neg Sf^L(\Sigma) \\ \Leftrightarrow\ & Lbase(\Sigma) = (\{Lp_i \mid Lp_i \in \Sigma\} \cup \{LE\}) \cup (\{\neg Lp_i \mid Lp_i \in \Sigma\} \cup \{\neg LE\}) \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \Lambda =& (\{Lp_i \mid Lp_i \in \Sigma\} \cup \{LE\} \cup \{\neg Lp_i \mid Lp_i \in \Sigma\} \cup \{\neg LE\}) \\ & \cap (\{Lp_i \mid p_i \in \Delta\} \cup \{LE\} \cup \{\neg Lp_i \mid p_i \notin \Delta\}) \\ =& \{Lp_i \mid p_i \in \Delta\} \cup \{\neg Lp_i \mid p_i \notin \Delta\} \cup \{LE\} \\ =& \{Lp_i \mid p_i \in \Delta\} \cup \{\neg Lp_i \mid \neg p_i \in \Delta\} \cup \{LE\} \\ =& \{Lp_i \mid Lp_i \in \Delta\} \cup \{\neg Lp_i \mid \neg Lp_i \in \Delta\} \cup \{LE\} \end{aligned}$$

Nach Behauptung 4.4 gilt

$$\text{E} \in SE_\Sigma(\Lambda) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \Sigma \cup \Lambda \cup \\ \{L\Psi \mid L\Psi \in Sf^q(\text{E}) \wedge \Psi \in SE_\Sigma(\Lambda)\} \cup \\ \{\neg L\Psi \mid L\Psi \in Sf^q(\text{E}) \wedge \Psi \notin SE_\Sigma(\Lambda)\} \end{array}\right\} \models \text{E}.$$

In E gibt es nach Definition keine Vorkommen von L, daher vereinfacht sich die Äquivalenz zu $\Sigma \cup \Lambda \models \mathrm{E} \Leftrightarrow \mathrm{E} \in SE_{\Sigma}(\Lambda)$.

$$\begin{aligned}\Sigma \cup \Lambda = &\{Lp_1 \leftrightarrow p_1, ..., Lp_n \leftrightarrow p_n, L\mathrm{E}\} \cup \{Lp_i \mid Lp_i \in \Delta\} \cup \{\neg Lp_i \mid \neg Lp_i \in \Delta\} \\ &\cup \{L\mathrm{E}\} \\ = &\{Lp_1 \leftrightarrow p_1, ..., Lp_n \leftrightarrow p_n, L\mathrm{E}\} \cup \{Lp_i \mid Lp_i \in \Delta\} \cup \{\neg Lp_i \mid \neg Lp_i \in \Delta\}\end{aligned}$$

Damit $\Sigma \cup \Lambda$ erfüllt ist, muss jedes p_i mit einem Wahrheitswert belegt werden. Die Belegung ist abhängig von der Belegung der Lp_i, die wiederum davon abhängig ist, ob Lp_i oder $\neg Lp_i$ in Δ enthalten sind.
Die q_i sind in dieser Belegung nicht enthalten, da $q_i \notin \Sigma \cup \Lambda$. E ist demnach für eine Wahrheitsbelegung der p_i erfüllt. Die resultierende Formel ist eine Tautologie für alle q_i. Es gilt also für alle $1 \leq i \leq n \exists p_i$, sodass $\forall q_i$ E erfüllt ist, d. h. $\exists p_1 \exists p_2 ... \exists p_n \forall q_i \forall q_2 ... \forall q_n \mathrm{E}$.
Aus der Existenz der stabilen Expansion Δ folgt, dass eine zugehörige gültige Formel der Form $\mathrm{QBF}_{2,\exists}$ existiert.
Also:

$$f(Q) = \Sigma \text{ hat eine stabile Expansion } \Leftrightarrow \text{ Q ist gültige } \mathrm{QBF}_{2,\exists}$$

"$\Rightarrow$"
Angenommen Q ist gültige $\mathrm{QBF}_{2,\exists}$.
D. h. $Q = \exists p_1 ... \exists p_n \forall q_1 ... \forall q_m \mathrm{E}$ und Q ist erfüllbar. Aufgrund der Form von Q folgt, dass eine Wahrheitsbelegung v für die Variablen $p_i, ..., p_m$ existiert, sodass, egal wie die Wahrheitswerte für $q_1, .., q_m$ gewählt werden, E unter v immer wahr ist.
Für die Menge $f(Q) = \Sigma = \{p_1 \leftrightarrow Lp_1, ..., p_n \leftrightarrow Lp_n, L\mathrm{E}\}$ ist

$$\begin{aligned}Lbase(\Sigma) &= Sf^L(\Sigma) \cup \neg Sf^L(\Sigma) \\ &= \{Lp_1, ..., Lp_n, L\mathrm{E}\} \cup \{\neg Lp_1, ..., \neg Lp_n, \neg L\mathrm{E}\}.\end{aligned}$$

Sei nun $\Lambda \subseteq Lbase(\Sigma)$ wie folgt gewählt.

$$\Lambda = \{Lp_i \mid v(p_i) = \text{wahr}\} \cup \{\neg Lp_i \mid v(p_i) = \text{falsch}\} \cup \{L\mathrm{E}\}$$

Mit Hilfe der Definition 4.5 kann gezeigt werden, dass Λ Σ-vollständig ist. Dafür müssen die folgenden Bedingungen für jedes $L\Phi$ aus $Sf^L(\Sigma)$ gelten.

(a) $\Sigma \cup \Lambda \models \Phi \Leftrightarrow L\Phi \in \Lambda$

(b) $\Sigma \cup \Lambda \not\models \Phi \Leftrightarrow L\Phi \notin \Lambda$

Die Menge der Subformeln ist hier $Sf^L(\Sigma) = \{Lp_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{L\mathrm{E}\}$.
Da $p_i \leftrightarrow Lp_i \in \Sigma$ für alle $1 \leq i \leq n$, gelten die Bedingungen für $\{Lp_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.
Also gilt die Äquivalenz $Lp_i \in \Lambda \Leftrightarrow \Sigma \cup \Lambda \models p_i$

Wenn $Lp_i \in \Lambda$, dann muss, damit $\Sigma \cup \Lambda$ erfüllt ist, sowohl Lp_i, als auch $Lp_i \leftrightarrow p_i$ erfüllt sein. Dies ist nur für die Wahrheitsbelegung $v(Lp_i) = v(p_i) =$ wahr möglich. Also gilt $\Sigma \cup \Lambda \models p_i$. Andersherum muss, wenn $\Sigma \cup \Lambda \models p_i$ erfüllt ist, auch $Lp_i \in \Lambda$ um den Fall auszuschließen, dass die Gültigkeit von $\Sigma \cup \Lambda$ durch $v(p_i) = v(Lp_i) =$ falsch erreicht wird.
Gleiches gilt für die 2. Bedingung:
$\neg Lp_i \in \Lambda \Leftrightarrow \Sigma \cup \Lambda \not\models p_i$
Damit p_i nicht erfüllt ist, wenn $\Sigma \cup \Lambda$ erfüllt, muss $\neg Lp_i \in \Delta$ sein, um die Belegung mit $v(Lp_i) = v(p_i) =$ falsch zu erzwingen.
Für E gelten diese Bedingungen aufgrund der Konstruktion von Λ.
Wenn Λ erfüllt ist, ist auch E erfüllt, es gilt also
$E \in \Lambda \Leftrightarrow \Sigma \cup \Lambda \models E$.
Der andere Fall tritt nach Konstruktion nicht ein, gilt aber aufgrund des Widerspruchs zwischen LE und $\neg LE$, der sich einstellen würde.
$\neg E \in \Lambda \Leftrightarrow \Sigma \cup \Lambda \not\models E$
Damit sind die Bedingungen aus Def. 4.5 für alle $L\Phi \in Sf^L(\Sigma)$ erfüllt und Λ ist Σ-vollständig. Daher handelt es sich bei der zugehörigen Menge $SE_\Sigma(\Lambda)$ um eine mögliche Expansion von Σ.
$\Rightarrow f(Q) = \Sigma$ besitzt eine stabile Expansion.

Es folgt also, dass das Existenzproblem für stabile Expansionen sowohl in Σ_2^P liegt, als auch Σ_2^P-schwer ist. Damit ist es Σ_2^P-vollständig. □

Korollar 4.1 (Gottlob [1]).
Das Entscheidungsproblem, ob eine Prämissenmenge Σ eine ***konsistente*** *stabile Expansion hat, ist Σ_2^P-vollständig.*

Beweis.
Folgt direkt aus dem Beweis für Satz 4.1.
Σ wird so konstruiert, dass die inkonsistente stabile Expansion $\mathcal{L}_{\mathrm{ae}}$ nicht möglich ist.
Also:
Σ hat stabile Expansion $\Leftrightarrow$ Σ hat **konsistente** stabile Expansion. □

4.4.2 Brave Reasoning

Satz 4.2 (Brave Reasoning Gottlob [1])**.**
Das Entscheidungsproblem, ob eine Formel Φ zu mindestens einer stabilen Expansion gehört, ist Σ_2^P-vollständig.

Beweis.

1. $\in \Sigma_2^P$
   Folgt direkt aus Behauptung 4.5.

2. Σ_2^P-schwer
   Die Schwere wird durch Reduktion vom, nach Satz 4.1 bekannt Σ_2^P-schweren, Problem der Existenz einer stabilen Expansion gezeigt. Da Expansionen unter logischer Ableitung abgeschlossen sind, folgt, dass die Tautologie $\top$ Element jeder stabilen Expansion ist.

Prämissenmenge Σ hat eine stabile Expansion	$\Leftrightarrow$	$f(\Sigma) = \top \in$ irgendeiner stabilen Expansion von Σ

   "$\Rightarrow$"
   Angenommen die Prämissenmenge Σ hat eine stabile Expansion Δ. Da $\top$ Element jeder stabilen Expansion ist, so auch dieser von Δ. Damit ist $\top$ Element irgendeiner stabilen Expansion von Σ.

   "$\Leftarrow$"
   Angenommen, $f(\Sigma) = \top$, und $\top$ ist Element irgendeiner stabilen Expansion von Σ, dann folgt auch, dass Σ mindestens eine stabile Expansion besitzt.

Damit folgt aus (1) und (2), dass das "Brave Reasoning" Problem Σ_2^P-vollständig ist. $\square$

4.4.3 Cautious Reasoning

Satz 4.3 (Cautious Reasoning Gottlob [1])**.**
Das Entscheidungsproblem, ob eine Formel Φ zu allen stabilen Expansionen einer Prämissenmenge Σ gehört ist Π_2^P-vollständig.

Beweis.

1. $\in \Pi_2^P$
   Folgt direkt aus Behauptung 4.6.

2. Π_2^P-vollständig
   Wie beim Beweis der Zugehörigkeit zu Π_2^P kann auch hier wieder das Komplementärproblem, dass eine Prämissenmenge Σ keine konsistente stabile Expansion hat, betrachtet werden.
   Nach dem Korollar 4.1 ist das Entscheidungsproblem über die Existenz einer **konsistenten** stabilen Expansion äquivalent zu dem einer stabilen Expansion und somit ebenfalls Σ_2^P-vollständig. Das Komplementärproblem ist demnach Π_2^P-vollständig. Der Beweis wird über die Reduktion von diesem Problem auf das des "Cautious Reasoning" geführt, mit $f(\Sigma) = \perp$ als Reduktionsfunktion.

Prämissenmenge Σ hat keine konsistente stabile Expansion	$\Leftrightarrow$	$f(\Sigma) = \perp \in$ jeder stabilen Expansion von Σ

   "$\Rightarrow$"
   Im Sonderfall, dass Σ keine stabile Expansion besitzt, ist die Aussage trivial erfüllt. Wenn Σ keine konsistente stabile Expansion besitzt, muss nach der Definition für inkonsistent gelten, dass die vorhandenen Expansionen nicht widerspruchsfrei sind, also zwingend $\perp$ enthalten.

   "$\Leftarrow$"
   Wenn $\perp \in$ aller stabilen Expansionen, dann sind alle diese Expansionen inkonsistent, s. o. Falls keine stabilen Expansionen existieren, ist die Aussage auch hier trivial erfüllt.

Aus (1) und (2) folgt Π_2^P-Vollständigkeit für "Cautious Reasoning". $\square$

Kapitel 5

Default Logik

5.1 Einführung

Eine weitere wichtige nichtmonotone Logik ist die Default Logik, hier genauer Reiters Default Logik von 1980. Diese Logik löst das Problem, Restriktionen einer logischen Aussage darzustellen, die mit der bekannten Aussagenlogik so nicht realisierbar sind.

Beispiel 5.1.
Betrachtet wird das folgende Problem mit den Aussagen:

- *Säugetiere können nicht fliegen*
- *Fledermäuse sind Säugetiere*
- *Fledermäuse können fliegen*

Ausgedrückt in Aussagenlogik ergibt sich der folgende Widerspruch.

$$\begin{aligned} Säugetier(x) &\Rightarrow \neg kann\_fliegen(x) \\ Fledermaus(x) &\Rightarrow Säugetier(x) \\ Fledermaus(x) &\Rightarrow kann\_fliegen(x) \end{aligned}$$

Wenn Y Säugetier und Fledermaus ist, folgt daraus

$$\begin{aligned} Fledermaus(Y) &\Rightarrow Säugetier(Y) \\ Säugetier(Y) &\Rightarrow \neg kann\_fliegen(Y) \\ Fledermaus(Y) &\Rightarrow kann\_fliegen(Y), \end{aligned}$$

damit ergibt sich

$$\begin{gathered} \neg\ kann\_fliegen(Y) \\ kann\_fliegen(Y). \quad \lightning \end{gathered}$$

Eine mögliche Lösung ist es, Ausnahmeregelungen hinzuzufügen. Dies ist jedoch nicht praktikabel, da dafür alle Sonderfälle bekannt sein müssen und für jeden möglichen Fall eine eigene Formel nötig ist. Dieses Problem kann durch die Default Logik gelöst werden, indem sogenannte Defaults definiert werden.

Definition 5.1 (Reiter [8]).

$$\textit{Default } d = \frac{\alpha : M\beta_1, M\beta_2, ..., M\beta_n}{\omega}$$

Dabei sind α, β_i, ω aussagenlogische Sätze.
α Voraussetzungen von d
β_i Begründung von d
ω Konsequenz von d

Intuitiv bedeutet diese Definition, dass, wenn α bekannt ist und es keinen Beweis gibt, dass β_i vielleicht falsch ist, ω abgeleitet werden kann. Es handelt sich also um Aussagen, die per default gelten.
Ein Default d ist durch eine deduktiv abgeschlossene Menge von Sätzen Φ erfüllt, wenn $(\alpha \in \Phi \wedge \beta_i$ konsistent mit $\Phi) \Rightarrow \omega \in \Phi$. Die Defaults geben die Information an, die per default in den meisten Fällen wahr sind, solange keine widersprüchliche Information bekannt ist.
Somit ist es möglich, Aussagen wie "in seltenen Fällen trifft X zu" darzustellen. Beispielsweise kann "In seltenen Fällen können Säugetiere fliegen" durch das Default

$$\frac{\text{Säugetier(x):M}\neg\text{kann\_fliegen(x)}}{\neg\text{kann\_fliegen(x)}}$$

ausgedrückt werden.
Umgekehrt ist es genauso möglich "in den meisten Fällen trifft X zu" auszudrücken.
Das Default

$$\frac{\text{Vogel(x):M kann\_fliegen(x)}}{\text{kann\_fliegen(x)}}$$

stellt dies am Beispiel von "die meisten Vögel können fliegen" dar [8].

Definition 5.2 (Reiter [8]).
Als aussagenlogische Default Theorie wird ein Tupel $\langle W, D \rangle$ bezeichnet, wobei W eine endliche Menge aussagenlogischer Sätze und D eine endliche Menge Defaults ist.

5.2 Default Extension

Ähnlich zur Expansion der autoepistemischen Logik liegt bei der Komplexitätsbetrachtung der Default Logik der Fokus auf den Default Extensionen, den möglichen Wissensmengen, die aufgrund der initialen Wissensmenge und Defaults angenommen werden können. Bei einer Extension E zu einer Default Theorie $\langle W, D\rangle$ handelt es sich informell gesprochen um die kleinste Menge an Formeln, die W enthalten, unter logischer Folgerung abgeschlossen sind und alle Defaults in D erfüllen [1]. Sie vervollständigt sozusagen die in W gegebenen Fakten, ohne Widersprüche zu erzeugen.

Beispiel 5.2.

$D = \left\{ \dfrac{S\ddot{a}ugetier(x) : Fledermaus(x)}{kann\_fliegen} \right\}$

$W = \{Fledermaus(Alice),\ S\ddot{a}ugetier(Bob), \forall x\ Fledermaus(x) \rightarrow S\ddot{a}ugetier(x)\}$
$E = W \cup$ *kann_fliegen(Alice)*

Definition 5.3 (Reiter [8])**.**
Gegeben sei eine Default Theorie $\langle W, D\rangle$*. Für eine Menge aussagenlogischer Formeln S sei* $\Gamma(S) = U$ *die kleinste Menge, die folgendes erfüllt*

1. $W \subseteq U$
2. *U deduktiv abgeschlossen*
   d. h. $\Phi \in U \Leftrightarrow U \models \Phi$ *für alle* $\Phi \in U$
3. *wenn* $\dfrac{\alpha : M\beta_1, M\beta_2, ..., M\beta_n}{\omega} \in D$, $\alpha \in U$ *und* $\neg\beta_1 \notin S, ..., \neg\beta_n \notin S$
   $\Rightarrow \omega \in U$

Eine Extension E von $\langle W, D\rangle$ *entspricht einem Fixpunkt von* Γ *und damit einer Menge* Φ *von aussagenlogischen Formeln, welche die Bedingung* $\Gamma(\Phi) = \Phi$ *erfüllen.*

Wie auch schon bei der autoepistemischen Logik kann es sich bei den Extensionen um unendliche Mengen handeln. Daher ist es für die spätere Beweisführung nötig, sie finitisch zu charakterisieren [1]. Als Grundlage werden dafür die folgenden zwei Mengen definiert.

Definition 5.4 (Reiter [8])**.**
Sei $\mathscr{T} = \langle W, D\rangle$ *eine aussagenlogische Default Theorie und E eine Extension von* $\mathscr{T}$*.*
Die Menge der generierenden Defaults für die Extension E im Bezug auf $\mathscr{T}$ *ist*

$$GD(E,\ \mathscr{T}) = \left\{ \frac{\alpha : M\beta_1, M\beta_2, ..., M\beta_n}{\omega} \in D \;\middle|\; \alpha \in E \text{ und } \neg\beta_1, ..., \beta_n \notin E \right\}.$$

Dies entspricht den Defaults, die dazu führen, dass ω *generiert, also der Extension hinzugefügt wird.*

Definition 5.5 (Reiter [8])**.**
Sei D eine Menge von Defaults. Die Menge aller Konsequenzen aus D wird mit:

$$CONSEQUENTS(D) = \left\{ \omega \;\middle|\; \frac{\alpha : M\beta_1, M\beta_2, ..., M\beta_n}{\omega} \in D \right\}$$

Daraus lässt sich nun eine finitische Charakterisierung der Extension bilden.

Behauptung 5.1 (Reiter [8] Satz 2.5)**.**
Angenommen, E sei Extension einer Default Theorie $\langle W, D\rangle$*, dann gilt für E:*

$$E = cons(W \cup CONSEQUENTS(GD(E,\ \mathscr{T}))).$$

Jede Extension wird also durch eine Teilmenge der endlichen Menge an Konsequenzen charakterisiert.

5.2.1 Eingeschränkte Defaults

Die zuvor allgemein definierten Defaults lassen sich auf verschiedene Weisen einschränken. Aus diesen eingeschränkten Defaults resultieren unterschiedliche eingeschränkte Default Theorien. Diese Einschränkungen haben unterschiedliche Auswirkungen auf die Beschaffenheit der Extensionen. Hier sind vor allem die semi-normalen und normalen Defaults wichtig.

Definition 5.6 (Gottlob [1])**.**

$$\textit{normales Default} \Leftrightarrow \frac{\alpha : M\omega}{\omega}$$
$$\textit{semi-normales Default} \Leftrightarrow \frac{\alpha : M(\gamma \wedge \omega)}{\omega}$$

Eine Default Theorie $\langle W, D \rangle$ *ist normal (semi-normal), genau dann, wenn alle Defaults* $d \in D$ *normal (semi-normal) sind.*

Es lässt sich zeigen, dass jede normale Default Theorie mindestens eine Extension besitzt, jedoch semi-normale Default Theorien existieren, die keine Extension besitzen [8].
Für die spätere Betrachtung der Komplexität sind daher besonders die semi-normalen Default Theorien interessant.
Dass semi-normale Default Theorien nicht zwingend Extensionen besitzen, beruht darauf, dass es hier die Möglichkeit gibt, dass sich die einzelnen Defaults gegenseitig ausschließen und somit keine Menge gebildet werden kann, die sie alle konsistent erfüllt.
Bei normalen Default Theorien kann dieser Fall aufgrund der Beschaffenheit der Defaults nicht auftreten. Es existiert also immer eine Extension. Am folgenden Beispiel für eine semi-normale Default Theorie ist dies leicht zu erkennen.

Beispiel 5.3 (Reiter & Criscuolo[9], Besnard [10])**.**
Sei $\langle W, D \rangle$ *eine semi-normale Default Theorie mit* $W{=}\emptyset$ *und*

$$D = \left\{ \frac{\top : M(\neg q \wedge p)}{p}, \frac{\top : M(\neg r \wedge q)}{q}, \frac{\top : M(\neg p \wedge r)}{r} \right\}.$$

Diese Default Theorie hat keine Extension, da die drei Defaults sich alle jeweils gegenseitig ausschließen.
Angenommen $\langle W, D \rangle$ *hätte eine Extension* Δ.
Nach Definition kann nun für alle möglichen Mengen an aussagenlogischen Formeln $\Phi = \Delta \cap \{p, q, r\}$ *der Widerspruch* $\Gamma(\Delta) \cap \Phi \neq \Phi$ *und damit auch* $\Gamma(\Delta) \neq \Delta$ *gezeigt werden.*

Aus $\Phi = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}, \{p, q, r\}\}$ *können dafür beispielhaft* $\emptyset$ *und* $\{p, q\}$ *gewählt werden.*

1. $\Phi = \emptyset$
   Die Menge der generierenden Defaults wäre in diesem Fall $GD(\Delta, \mathscr{T}) = \emptyset$.
   Nach Behauptung 5.1 müsste für Δ *folglich gelten, dass*

   $$\Delta = cons(W \cup CONSEQUENTS(GD(\Delta, \mathscr{T}))).$$

   In diesem Fall lässt sich die Bedingung zu $\Delta = cons(\emptyset)$ *vereinfachen.*
   Dies würde bedeuten, dass Δ *aus allen aussagenlogischen Tautologien bestehen müsste.*
   Wie für alle Extensionen muss auch hier die Begründungen aller Defaults konsistent mit der Extension Δ *sein. Also gilt* $\{p, q, r\} \in \Gamma(\Delta)$. *Damit muss* $\Gamma(\Delta) \neq \Delta$ *gelten, denn* $\{p, q, r\}$ *sind keine Tautologien. Also handelt es sich bei* $\emptyset$ *nicht um eine Extension.*

2. $\Phi = \{p, q\}$
Die Argumentation geschieht ähnlich wie im ersten Fall. Es wird die Menge

$$GD(\Delta, \mathscr{T}) = \frac{\top : M(\neg q \land p)}{p}, \frac{\top : M(\neg r \land q)}{q}$$

gebildet. Nach der Behauptung 5.1 folgt wiederum $\Delta = cons(\{p, q\})$.
Die Begründungen des ersten und dritten Defaults, $\neg q \land p$ *und* $\neg q \land p$, *sind allerdings inkonsistent mit diesem* Δ. *Daher ist* $cons(\{q\})$ *die kleinste Menge, die alle Bedingungen für* $\Gamma(\Delta)$ *erfüllt. Also* $\Gamma(\Delta) = cons(\{q\}) \neq cons(\{p, q\}) \neq \Delta$ ↯.

Ähnlich kann nun auch für die anderen Fälle gezeigt werden, dass es sich dabei um keine Extension handelt, die Default Theorie schlussendlich also keine Extension besitzt.

5.3 Die drei Hauptentscheidungsprobleme für die Default Logik

Auch für die Default Logik wird nun die Komplexität der drei Probleme betrachtet.

1. Das Entscheidungsproblem, ob für eine Default Theorie $\langle W, D \rangle$ eine Extension existiert, ist Σ_2^P-vollständig.
2. Das Entscheidungsproblem, ob eine Formel Φ in mindestens einer Extension enthalten ist ("Brave Reasoning"), ist Σ_2^P-vollständig.
3. Das Entscheidungsproblem, ob eine Formel Φ in allen Extensionen enthalten ist ("Cautious Reasoning"), ist Π_2^P-vollständig.

Zuerst wird die Zugehörigkeit zu den Komplexitätsklassen gezeigt.

Satz 5.1.
Das Entscheidungsproblem, ob eine Default Theorie $\langle W, D \rangle$ eine Extension besitzt, ist Element von Σ_2^P.

Beweis.
Um zu zeigen, dass $\langle W, D \rangle$ eine Extension besitzt, werden nichtdeterministisch mögliche Mengen generierender Defaults nach Def. 5.4 geraten. Da deren Anzahl dabei polynomiell in der Kardinalität von $|D| = n$ beschränkt ist, kann dies von einem NP-Algorithmus gelöst werden.
Für jedes Default $\in GD$ wird geprüft, ob die Bedingung aus Def. 5.4

$$\mathrm{GD}(\mathrm{E}, \mathscr{T}) = \left\{ \frac{\alpha : M\beta_1, M\beta_2, ..., M\beta_n}{\omega} \in D \;\middle|\; \alpha \in \mathrm{E} \text{ und } \neg\beta_1, ..., \beta_n \notin \mathrm{E} \right\}$$

erfüllt ist. Für die gewählte Menge GD werden nach Def. 5.5 die Konsequenzen berechnet.

$$\mathrm{CONSEQUENTS(GD)} = \left\{ \omega \;\middle|\; \frac{\alpha : M\beta_1, M\beta_2, ..., M\beta_n}{\omega} \in \mathrm{GD} \right\}$$

Anschließend muss geprüft werden, ob die resultierende Menge eine finitische Charakterisierung einer Extension darstellt. Dazu muss die Bedingung aus Beh. 5.1

$$\mathrm{E} = \mathit{cons}(\mathrm{W} \cup \mathrm{CONSEQUENTS(GD)})$$

erfüllt sein. Dies kann mit einem NP-Orakel geprüft werden. Das Entscheidungsproblem lässt sich also von einem nichtdeterministischen Algorithmus mit einer polynomiellen Anzahl Aufrufe an ein NP-Orakel lösen, liegt also in $\mathrm{NP}^{\mathrm{NP}} = \Sigma_2^P$.

□

Satz 5.2 (Brave Reasoning)**.**
Das Entscheidungsproblem, ob eine Formel Φ in mindestens einer Extension einer Default Theorie $\langle W, D \rangle$ enthalten ist, ist Element Σ_2^P.

Beweis.
In Satz 5.1 wurde gezeigt, dass die Überprüfung, einer Default Theorie auf Extensionen in Σ_2^P liegt.
Um nun zu zeigen, dass eine Formel Φ in mindestens einer Extension enthalten ist, kann auf gleiche Weise ein mögliche Menge generierender Defaults, welche eine Extension konstruiert, die Φ enthält, nichtdeterministisch geraten werden. Zusätzlich zum vorherigen Beweis muss das Vorkommen von Φ geprüft werden, was ebenfalls durch den Aufruf des NP-Orakel realisiert wird. Damit kann das Problem des "Brave Reasoning" äquivalent zu dem der Existenz von Extensionen von einem nichtdeterministischen Polynomialzeitalgorithmus mit Aufrufen eines NP-Orakels entschieden werden, ist also Element von Σ_2^P.

□

Satz 5.3 (Cautious Reasoning).
Das Entscheidungsproblem, ob eine Formel Φ *in allen Extensionen einer Default Theorie* $\langle W, D \rangle$ *enthalten ist, ist Element* Σ_2^P.

Beweis.
Für das "Cautious Reasoning" ist es, wie auch schon im Beweis zur autoepistemischen Logik, einfacher, das Komplementärproblem, dass Φ in einer Extension nicht enthalten ist, zu betrachten. Dadurch kann der Beweis, ähnlich wie auch die beiden vorherigen Beweise, über das Raten einer Menge generierender Defaults, in deren resultierender Extension Φ nicht enthalten ist, geführt werden.
Das NP-Orakel wird zum Prüfen verwendet, dass die Bedingung

$$\mathrm{E} = cons(\mathrm{W} \cup \mathrm{CONSEQUENTS(GD)})$$

erfüllt und $\Phi \notin \mathrm{E}$ ist. Also kann das Komplementärproblem mit einem NP-Algorithmus mit Aufrufen eines NP-Orakels entschieden werden, liegt demnach in Σ_2^P und damit das Problem des "Cautious Reasoning" in Π_2^P. □

5.4 Vollständigkeitsbeweise

5.4.1 Existenzproblem

Satz 5.4 (Gottlob [1]).
Das Problem, ob eine Default Theorie $\langle W, D\rangle$ eine Extension besitzt, ist Σ_2^P-vollständig.

Beweis.

1. $\in \Sigma_2^P$
2. Σ_2^P-schwer
   Wie auch schon bei der autoepistemischen Logik kann dieser Beweis über die Reduktion vom bereits bekannten Problems $\text{QBF}_{2,\exists}$ geführt werden. Als Reduktionsfunktion wird die Umwandlung einer QBF zu einer Default Theorie wie folgt gewählt.
   Sei
   $$Q = \exists p_1 ... \exists p_n \forall q_1 ... \forall q_m E,$$
   mit E, eine aussagenlogische Formel aus den atomaren Formeln p_i, q_i, die QBF und $f(Q) = \langle W, D\rangle$, die zugehörige Default Theorie mit $W = \emptyset$ und
   $$D = \left\{ \frac{\top : Mp_1}{p_1}, \frac{\top : M\neg p_1}{\neg p_1}, ..., \frac{\top : Mp_n}{p_n}, \frac{\top : M\neg p_n}{\neg p_n}, \frac{\top : M\neg E}{\bot} \right\}.$$
   Die Reduktionsfunktion ist in Polynomialzeit berechenbar.
   Es bleibt also noch zu zeigen, dass
   $$Q \in \text{QBF} \Leftrightarrow f(Q) = \langle W, D\rangle \text{ hat eine Extension}$$
   gilt.

   "$\Rightarrow$" Angenommen $f(Q) = \langle W, D\rangle$ hat eine Extension Δ.

   Auf Grund der Konstruktion von D muss die Extension Δ entweder p_i oder $\neg p_i$ für $1 \leq i \leq n$ enthalten, damit D erfüllt werden kann. Dabei darf nur entweder die negierte oder nicht negierte Version enthalten sein, damit Δ widerspruchsfrei ist. Da Δ außerdem widerspruchsfrei sein muss, wenn auch W schon widerspruchsfrei war, folgt, dass $\bot \notin \Delta$ ist. W ist hier $\emptyset$, daher ist die Widerspruchsfreiheit direkt gegeben. Aus diesem Resultat und dem Default $\frac{\top : M\neg \text{E}}{\bot}$ kann geschlossen werden, dass $\neg$E inkonsistent mit Δ ist. Damit von Δ auf $\neg$E geschlossen werden kann, müsste $\bot \in \Delta$ sein. Dies steht im Widerspruch zur obigen Aussage. Also gilt $\Delta \models$ E.
   Nach Behauptung 5.1 kann Δ finitisch charakterisiert werden.
   $$\begin{aligned}\Delta =& cons(W \cup \text{CONSEQUENTS}(\text{GD}(\Delta, (T))) \\ =& cons(\emptyset \cup \text{CONSEQUENTS}(\text{GD}(\Delta, (T))) \\ =& cons(\text{CONSEQUENTS}(\text{GD}(\Delta, (T))) \\ =& cons\left(\left\{\frac{\top : Mp_i}{p_i} \mid p_i \in \Delta\right\} \cup \left\{\frac{\top : M\neg p_j}{\neg p_j} \mid \neg p_j \in \Delta\right\}\right) \\ =& cons(\{p_i \mid p_i \in \Delta\} \cup \{\neg p_j \mid \neg \in \Delta)\end{aligned}$$

   Dies angewandt auf die Bedingung $\Delta \models E$ ergibt
   $$\Delta = cons(\{p_i \mid p_i \in \Delta\} \cup \{\neg p_j \mid \neg p_j \in \Delta\}) \models \text{E}.$$
   $$\Rightarrow \Delta \models E$$

Das heißt, es existiert eine Belegung der Variablen $p_1, .., p_n$, sodass für alle $q_1, ..., q_n$, E geschlossen werden kann. Die Belegung wird so gewählt, dass alle negierten Variablen auf falsch, die anderen auf wahr gesetzt werden.
Damit ist Q eine erfüllbare aussagenlogische QBF und es gilt

$$\langle W, D \rangle \text{ hat eine Extension } \Rightarrow Q \in \text{QBF}.$$

"$\Leftarrow$" $Q \in$ QBF

Q ist QBF von der Form $Q = \exists p_1 ... \exists p_n \forall q_1 ... \forall q_m$E. Wenn Q erfüllbar ist existiert eine Wahrheitsbelegung v für die p_i, sodass, unabhängig von der Belegung für q_i, E immer erfüllt ist. Mithilfe der Reduktionsfunktion wird die Default Theorie wie zu Beginn beschrieben konstruiert.
Sei nun $\Delta = cons(\{p_i \mid v(p_i) = \text{wahr}\} \cup \{\neg p_j \mid v(p_j) = \text{falsch}\})$ eine mögliche Extension. Da Δ aus der Wahrheitsbelegung gebildet wurde, gilt außerdem $\Delta \models E$ und da die Extension außerdem deduktiv abgeschlossen ist, folgt E $\in \Delta$. Es gilt zu verifizieren, ob es sich bei der gewählten Menge tatsächlich um eine Extension für die Default Theorie handelt.
Angenommen $\Gamma(\Delta) \subseteq \Delta$, so erfüllt Δ die Bedingungen der Definition 5.1 für Extensionen.

(1) $W \subseteq \Gamma(\Delta) \subseteq \Delta$
$\emptyset \subseteq \Gamma(\Delta) \subseteq \Delta$

(2) $\Gamma(\Delta) \subseteq \Delta$ deduktiv abgeschlossen
D. h. $\Gamma(\Delta) \models \Phi \Leftrightarrow \Phi \in \Gamma(\Delta)$
Folgt direkt aus der Definition von Δ.

(3) $\dfrac{\alpha : M\beta_1 ... M\beta_n}{\omega} \in D \; \alpha \in \Gamma(\Delta), \neg\beta_i \notin \Delta \Rightarrow \omega \in \Delta$

Die Bedingung muss für alle Defaults aus D gelten.

$$D = \left\{ \frac{\top : Mp_1}{p_1}, \frac{\top : M\neg p_1}{\neg p_1}, ..., \frac{\top : Mp_n}{p_n}, \frac{\top : M\neg p_n}{\neg p_n}, \frac{\top : M\neg E}{\bot} \right\}$$

Angenommen $\alpha = \top \in \Gamma(\Delta) \subseteq \Delta$. Für die drei unterschiedlichen Arten von Defaults wird nun gezeigt, dass die dritte Bedingung gilt.

$\dfrac{\top : Mp_i}{p_i} \in D$:

Wenn $\neg\beta = \neg p_i \notin \Delta$, dann soll $\omega = p_i \in \Gamma(\Delta) \subseteq \Delta$ gelten.

$$\neg p_i \notin \Delta \Rightarrow v(p_i) = \text{true, denn } v(p_i)\text{=false} \Leftrightarrow \neg p_i \in \Delta$$
$$v(p_i) = \text{true} \Rightarrow \omega = p_i \in \Delta, \text{ denn } v(p_i)\text{=true} \Leftrightarrow p_i \in \Delta$$

$\dfrac{\top : M\neg p_i}{\neg p_i}$:

Wenn $\neg\beta = \neg\neg p_i = p_i \notin \Delta$, dann soll $\omega = \neg p_i \in \Gamma(\Delta) \subseteq \Delta$ gelten.

$$p_i \notin \Delta \Rightarrow v(p_i) = \text{false, denn } v(p_i)\text{=true} \Leftrightarrow p_i \in \Delta$$
$$v(p_i) = \text{false} \Rightarrow \omega = p_i \in \Delta, \text{ denn } v(p_i)\text{=false} \Leftrightarrow \neg p_i \in \Delta$$

$\frac{\top : M\neg E}{\bot}$:

Wenn $\neg\beta = \neg\neg E = E \notin \Delta$, dann soll $\omega = \bot \in \Gamma(\Delta) \subseteq \Delta$ gelten.
Es folgt direkt, dass dann $\bot \in \Gamma(\Delta)$, bzw. Δ, da E nicht gültig in Δ im direkten Widerspruch zur Konstruktion der Extension steht.

Durch

$$p_i \in \Gamma(\Delta) \Leftrightarrow p_i \in \Delta$$
$$\neg p_i \in \Gamma(\Delta) \Leftrightarrow \neg p_i \in \Delta$$

lässt sich außerdem zeigen, dass $\Delta \subseteq \Gamma(\Delta)$ und damit $\Gamma(\Delta) = \Delta$.

Damit folgt also, dass die kleinste Menge $\Gamma(\Delta)$, die die Bedingungen der Extension erfüllt, gleich Δ sein muss.

$\Rightarrow f(Q) = \langle W, D\rangle$ hat eine Extension
Es gilt also

$$Q \in \text{QBF} \Leftrightarrow f(Q) = \langle W, D\rangle \text{ hat eine Extension}$$

und die Funktion f ist in Polynomialzeit berechenbar, damit lässt sich $\text{QBF}_{2,\exists}$ auf das Existenzproblem reduzieren. Da $\text{QBF}_{2,\exists}$ Σ_2^P-schwer ist, ist auch das Existenzproblem Σ_2^P-schwer. Mit der in (1) gezeigten Zugehörigkeit zu Σ_2^P folgt demnach, dass das Entscheidungsproblem, ob eine Default Theorie eine Extension besitzt, Σ_2^P-vollständig ist.

□

Satz 5.5 (Gottlob [1]).
Das Existenzproblem ist auch für semi-normale Defaults Σ_2^P-vollständig.

Beweis.
Die Reduktionsfunktion kann wie oben gewählt werden. Außer dem letzten Default $\frac{\top : M\neg \text{E}}{\bot}$ handelt es sich bei allen anderen bereits um semi-normale Defaults. Um dies zu umgehen wird eine neue Defaultmenge D' aus D bestimmt, in der das normale Default durch die drei semi-normalen Defaults

$$\frac{\top : M(\neg q \wedge p \wedge \neg \text{E})}{p}, \frac{\top : M(\neg r \wedge q \wedge \neg \text{E})}{q}, \frac{\top : M(\neg p \wedge r \wedge \neg \text{E})}{r}$$

ersetzt wird. Dabei sind p, q und r neue aussagenlogische Variablen die nicht schon in D enthalten sind.
Da so alle Defaults in D' semi-normal sind, ist auch die Default Theorie $\langle \emptyset, \text{D'}\rangle$ semi-normal.
Zu zeigen ist nun, dass auch in diesem Fall die Äquivalenz

$$Q \in \text{QBF} \Leftrightarrow \text{ Default Theorie } \langle \emptyset, \text{D'}\rangle \text{ hat eine Extension}$$

gilt.
Angenommen, die p_i und $\neg p_j$ werden nicht so gewählt, dass E gültig ist, also $\neg$E=1, so sind die drei neuen Defaults äquivalent zu den gegenseitig inkompatiblen Defaults aus Beispiel 5.3.

$$\Rightarrow \frac{\top : M(\neg q \wedge p \wedge 1)}{p}, \frac{\top : M(\neg r \wedge q \wedge 1)}{q}, \frac{\top : M(\neg p \wedge r \wedge 1)}{r}$$
$$\Rightarrow \frac{\top : M(\neg q \wedge p)}{p}, \frac{\top : M(\neg r \wedge q)}{q}, \frac{\top : M(\neg p \wedge r)}{r}$$

Nach dem Beweis im Beispiel existiert in diesem Fall keine Extension.

$$Q \notin \text{QBF} \Rightarrow \langle \emptyset, D'\rangle \text{ hat keine Extension}$$

Wenn die Variablen so gewählt werden, dass E gültig ist, ¬E=0, folgt

$$\frac{\top : M(\neg q \land p \land 0)}{p}, \frac{\top : M(\neg r \land q \land 0)}{q}, \frac{\top : M(\neg p \land r \land 0)}{r}$$
$$\Rightarrow \frac{\top : M(\bot)}{p}, \frac{\top : M(\bot)}{q}, \frac{\top : M(\bot)}{r}$$

In diesem Fall besitzt D' äquivalent zum Beweis 5.2 eine Extension. Die obigen drei Defaults sind nicht mehr gegenseitig inkompatibel. Außerdem wurde für die Default Menge D bereits im Beweis für Satz 5.2 gezeigt, dass eine Extension existiert. Dieses Resultat gilt auch für $D \backslash \left\{ \frac{\top : M(\neg \mathrm{E})}{\bot} \right\}$.

$$Q \in \text{QBF} \Rightarrow \left\langle \emptyset, \text{D'} \right\rangle \text{ hat eine Extension}$$

Damit folgt aus beiden Resultaten

$$Q \in \text{QBF} \Leftrightarrow \left\langle \emptyset, \text{D'} \right\rangle \text{ hat eine Extension.}$$

□

5.4.2 Brave Reasoning

Satz 5.6 (Brave Reasoning Gottlob [1]).
Das Entscheidungsproblem, ob eine Formel Φ Element mindestens einer Extension einer aussagenlogischen Default Theorie $\left\langle W, D \right\rangle$ ist, ist Σ_2^P-vollständig.

Beweis.
Die Σ_2^P-Schwere kann durch Reduktion von $\text{QBF}_{2,\exists}$ gezeigt werden, wobei als Reduktionsfunktion

$$f(Q) = \langle \emptyset, D_1 \rangle \text{ mit}$$
$$D_1 = \left\{ \frac{\top : Mp_1}{p_1}, \frac{\top : M\neg p_1}{\neg p_1}, ..., \frac{\top : Mp_n}{p_n}, \frac{\top : M\neg p_n}{\neg p_n} \right\}$$

gewählt wird. Diese ist in Polynomialzeit berechenbar.
Wähle $\Phi = E$ als Formel, die in mindestens einer Extension enthalten sein soll.
Zu zeigen bleibt, dass

$$Q \in \text{QBF} \Leftrightarrow \text{ es existiert eine Extension von f(Q)= } \langle \emptyset, D_1 \rangle, \text{ die E enthält}$$

Angenommen $Q \in \text{QBF}_{2,\exists}$, dann existiert eine Wahrheitsbelegung für die p_i, sodass für alle möglichen Belegungen der q_i E gültig ist. Es existiert also eine Extension, die diese Wahrheitsbelegung repräsentiert und damit auch E enthält. Die Rückrichtung funktioniert auf gleiche Weise.
Wenn E in mindestens einer Extension von $\langle \emptyset, D_1 \rangle$ enthalten ist, bilden die außerdem enthaltenen p_i, bzw. $\neg p_i$ eine gültige Wahrheitsbelegung für Q. Daraus folgt, dass $Q \in \text{QBF}_{2,\exists}$. Allgemein lässt sich sagen, dass ein injektiver Zusammenhang zwischen der Wahrheitsbelegung der Variablen $p_1, ..., p_n$ und den Extensionen von $\langle \emptyset, D_1 \rangle$ besteht. Das Entscheidungsproblem, ob eine Formel zu mindestens einer Extension gehört, ist Σ_2^P-vollständig. □

5.4.3 Cautious Reasoning

Satz 5.7 (Cautious Reasoning Gottlob [1]).
Das Entscheidungsproblem, ob eine Formel Φ Element aller Extensionen einer aussagenlogischen Default Theorie $\langle W, D \rangle$ ist, ist Π_2^P-vollständig.

Beweis.
Zum Beweis der Π_2^P-Schwere wird hier die gleiche QBF Q wie im vorherigen Beweis gewählt. Damit Π_2^P-Vollständigkeit gezeigt werden kann, muss darüber argumentiert werden, dass Q nicht gültig ist. QBF ist Π_2^P-vollständig, wenn Q von der Form $\forall\exists$E (s. Abb. 3.1) ist.
Als Reduktionsfunktion wird

$$f(Q) = \langle \emptyset, D_1 \rangle \text{ mit}$$
$$D_1 = \left\{ \frac{\top : Mp_1}{p_1}, \frac{\top : M\neg p_1}{\neg p_1}, ..., \frac{\top : Mp_n}{p_n}, \frac{\top : M\neg p_n}{\neg p_n}, \frac{\top : M\neg \mathrm{E}}{\neg \mathrm{E}} \right\}$$

gewählt.
Sei nun $\Phi = \neg$E die Formel, für die geprüft wird, ob sie in allen Extensionen enthalten ist.
Zu zeigen ist also:
Q nicht gültig $\Leftrightarrow \neg$ E ist Element jeder Extension von f(Q)

Angenommen, $\neg$E ist Element jeder Extension von f(Q) = $\langle \emptyset, D_1 \rangle$. Aus der Definition der Extension als kleinste Menge der möglichen erfüllten Aussagen folgt direkt, dass $\neg$E immer gültig ist. Die Formel $Q = \exists p_1 ... \exists p_n \forall q_1 ... \forall q_m \mathrm{E}$ kann also nicht erfüllt sein, da sonst E erfüllt im Widerspruch zu $\neg$E erfüllt stünde.
Also $\neg$E Element jeder Extension $\Rightarrow Q$ nicht gültig.

Andersherum, wenn Q keine gültige $\mathrm{QBF}_{2,\exists}$ ist, ist $Q = \forall q_1 ... \forall q_n \exists p_1 ... \exists p_n \mathrm{E}$ und nicht erfüllt. Es existiert also keine Wahrheitsbelegung, sodass für jede möglich Belegung der q_i eine Belegung der p_i existiert, sodass E erfüllt ist. Es gilt also $\neg$E für jede Belegung von p_i, damit muss $\neg$E in jeder Extension von $\langle \emptyset, D_1 \rangle$ enthalten sein.
Also Q nicht gültig $\Rightarrow \neg$E Element jeder Extension

Die Reduktionsfunktion ist wie für ähnliche Fälle bereits gezeigt in Polynomialzeit berechenbar. Damit folgt, dass das Entscheidungsproblem, ob eine Formel Φ zu allen Extensionen einer Default Theorie gehört, Π_2^P-vollständig ist. □

Kapitel 6

Resultate

In dieser Arbeit wurden die autoepistemische und die Default Logik, auf Grundlage der Ergebnisse von Niemelä [5], Reiter [8] und Gottlob [1], auf ihre Komplexität untersucht.

Für die drei Entscheidungsprobleme nichtmonotoner Logiken

1. Expansion/Extension Existenzproblem
2. Brave Reasoning
3. Cautious Reasoning

konnte für (1) und (2) Σ_2^P-Vollständigkeit, sowie für (3) Π_2^P-Vollständigkeit gezeigt werden. In der Polynomialzeithierarchie liegen sie damit auf dem 2. Level. Da die Folgerung monotoner Logik in co-NP und damit auf dem 1. Level der Hierarchie liegt, ist die nichtmonotone Folgerung echt schwerer als die monotone, solange die Komplexitätshierarchie nicht zusammenfällt [1].

Das wichtigste Resultat ist, dass für die beiden verschiedenen Logiken die gleiche Komplexität der Entscheidungsprobleme gezeigt werden konnte. Probleme in den Klassen Σ_2^P und Π_2^P sind per Definition in polynomieller Zeit ineinander überführbar. Damit gilt auch, dass sich die Entscheidungsprobleme der autoepistemischen sowie der Default Logik jeweils ineinander umwandeln lassen.
Gleiche Resultate gelten auch für andere nichtmonotone Logiken, wie die nichtmonotone Logik nach McDermott und Doyle oder auch modale nichtmonotone Logiken [1].

Diese Eigenschaft ist vor allem von Vorteil, da sie erlaubt, bereits bekannte automatische Beweiser oder Folgerungsmaschinen wiederzuverwenden [1]. Genauso reicht es so, die, je nach Anwendungsfall, einfacher zu konstruierende Variante zu erarbeiten, welche dann für alle äquivalenten nichtmonotonen Logiken verwendet werden kann.

In der Forschung stellt sich die Frage, ob und welche Möglichkeiten es gibt, Probleme die auf dem 2. Level der Polynomialzeithierarchie liegen, effizient zu lösen [1].

Literatur

[1] Georg GOTTLOB. "Complexity results for nonmonotonic logics". In: *Journal of Logic and Computation* 2.3 (1992), S. 397–425.

[2] Christian STRASSER und G. Aldo ANTONELLI. "Non-monotonic Logic". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Hrsg. von Edward N. Zalta. Summer 2018. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.

[3] Bender2k14. *Polynomial time hierarchy*. 2011. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Polynomial_time_hierarchy.svg%5C#globalusage (besucht am 05. 02. 2019).

[4] Uwe EGLY. *Quantified Boolean FormulasPart 1*. Folie 29ff. 2012. URL: http://www.vcla.at/wp-content/uploads/2012/01/WS_Basic_Egly.pdf (besucht am 08. 03. 2019).

[5] Ilkka NIEMELÄ. "Towards automatic autoepistemic reasoning". In: *Logics in AI*. Hrsg. von J. van Eijck. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991, S. 428–443. ISBN: 978-3-540-46982-7.

[6] PD Dr. Anni-Yasmin TURHAN. *Introduction to Nonmonotonic Reasoning*. TU Dresden. 2017/2018. URL: https://lat.inf.tu-dresden.de/teaching/ws2017-2018/NMR/Chapter4.pdf (besucht am 10. 03. 2019).

[7] Robert C MOORE. "Semantical considerations on nonmonotonic logic". In: *Artificial intelligence* 25.1 (1985), S. 75–94.

[8] Raymond REITER. "A logic for default reasoning". In: *Artificial intelligence* 13.1-2 (1980), S. 81–132.

[9] Raymond REITER und Giovanni CRISCUOLO. "On Interacting Defaults." In: *IJCAI*. Bd. 81. 1981, S. 270–276.

[10] Philippe BESNARD. "Problems with Default Logic". In: *An Introduction to Default Logic*. Springer, 1989, S. 101–110.