Die Prädikatenlogik der zweiten Stufe

Henrik Müller
Matrikelnummer: 3217710
18. März 2019

Betreuer: Prof. Dr. Heribert Vollmer
Erstprüfer: Prof. Dr. Heribert Vollmer
Zweitprüfer: Dr. Arne Meier

Erklärung der Selbständigkeit

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden, alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind, und die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen hat.

Hannover, den 18. März 2019

Henrik Müller

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Prädikatenlogik dient der formalen Beschreibung und Auswertung mathematischer Aussagen. Dabei ermöglicht die Prädikatenlogik der ersten Stufe die Quantifizierung über Objekte erster Stufe, die Elemente einer Struktur. Diese bietet durch die zentralen Sätze, wie dem Satz von Löwenheim und Skolem und dem Endlichkeitssatz, sowie dem Gödelschen Vollständigkeitssatz, explizite Folgerungen zu formulierten Aussagen in der ersten Stufe. Insbesondere ermöglicht der Vollständigkeitssatz eine Überführung des formellen Folgerungsbegriffs zu dem strukturellen Ableitungsbegriff, welcher das automatisierte Erstellen und Überprüfen von Beweisen durch Maschinen ermöglicht.
Dennoch ist die Aussagekraft der Prädikatenlogik der ersten Stufe beschränkt. Dies zeigt sich bereits in der Formulierung der natürlichen Zahlen durch die Peano-Axiome. Bei diesen scheitert die erste Stufe bei der Beschreibung des Induktionsaxioms in der Aussage über alle Teilmengen der Trägermenge.

Die Prädikatenlogik der zweiten Stufe soll daraus folgend eine Erweiterung der Aussagekraft der ersten Stufe ermöglichen. Dafür wird die erste Stufe um die Quantifizierung über alle Teilmengen, die Objekte der zweiten Stufe, erweitert. Dies soll insbesondere die Aussagekraft über die Möglichkeiten der ersten Stufe hinaus erweitern, damit alle mathematische Argumentationen formal definiert und nachvollzogen werden können, aber auch Hilfsmittel, wie in der ersten Stufe, zur Untersuchung von weiteren mathematischen Aussagen liefern.

Der Großteil der verwendeten Beweise und Beispiele stammen aus [Ebbinghaus et al., Einführung in die mathematische Logik, 2018]. Wurden andere Quellen verwendet, so werden diese durch Angabe von Zitaten gekennzeichnet.

Kapitel 2

Definition

2.1 Syntax

Die Prädikatenlogik der zweiten Stufe $\mathfrak{L}_{II}$ ist eine Erweiterung der ersten Stufe $\mathfrak{L}_I$. Sie wird wie in der ersten Stufe durch die Kombination von Sprache und Modellbeziehung bestimmt. Die Ausdrücke und Sätze aus $\mathfrak{L}_I$ lassen sich ohne Änderungen der Syntax oder Semantik in $\mathfrak{L}_{II}$ weiterhin bilden. Das Alphabet, sowie grundlegende Operationen und Definitionen wie das Ausdruckskalkül dienen dabei als Grundlage für die Erweiterungen.

2.2 Erweiterung der ersten Stufe

Zunächst werden wir die Sprache der ersten Stufe L^S zur Sprache der zweiten Stufe L^S_{II} erweitern und danach die Modellbeziehung entsprechend anpassen. Die Semantik der Prädikatenlogik der ersten Stufe wird um quantifizierbare Variablen für Eigenschaften und Mengen erweitert. Dadurch ist es möglich Aussagen über Teilmengen der Trägermenge zu definieren.

2.2.1 Relationsvariablen

Das Alphabet von L^S wird für jedes n ≥ 1 um abzählbar viele n-stellige Relationsvariablen $V_0^n, V_1^n, V_2^n, \ldots$ erweitert. Der Einfachheit halber werden diese im Folgenden mit X,Y,... mit expliziter Angabe der Stelligkeit bezeichnet. Mit diesen lässt sich nun das Ausdruckskalkül für L^S um die folgenden Regeln erweitern:

a) Wenn X eine n-stellige Relationsvariable ist und $t_1, \ldots, t_n$ S-Terme sind, so ist X$t_1, \ldots, t_n$ ein S-Ausdruck.

b) Für einen S-Ausdruck φ und eine Relationsvariable X ist $\exists$Xφ ein S-Ausdruck.

2.2.2 Funktionsvariablen

Neben der Erweiterung um Relationsvariablen kann auch eine Erweiterung zur Quantifizierung über Funktionsvariablen von Interesse sein. Diese Erweiterung

ermöglicht eine Verbesserung der Lesbarkeit, bietet allerdings keine weiteren Ausdrucksmöglichkeiten. Jeder Ausdruck φ über Funktionsvariablen lässt sich durch Betrachtung der dazugehörigen Funktionsgraphen in einen Ausdruck ψ mit Relationsvariablen überführen. Die Relationsvariablen in ψ beschreiben dann die Menge der Kombinationen von Funktionseingaben und den dazugehörigen Ausgaben. Dabei werden auf Grund der Einbeziehung des Bildbereichs der Funktionen aus den n-stelligen Funktionsvariablen $(n+1)$-stellige Relationsvariablen.
Dazu ein Beispiel für die Umformung anhand eines Satzes φ_{bij} über die Existenz einer bijektiven einstelligen Funktion g auf der Trägermenge. In diesem werden dafür in der folgenden Formulierung die Injektivität und Surjektivität der Funktion gefordert:

$$\varphi_{bij} := \exists g(\forall x \forall y(gx \equiv gy \rightarrow x \equiv y) \wedge \forall y \exists x\ y \equiv gx)$$

Aus diesem lässt sich der äquivalente Satz ψ_{bij} zur Existenz einer zweistelligen Relation G bilden, welche den zur Funktion g gehörigen Funktionsgraphen beschreibt:

$$\psi_{bij} := \exists G(\forall y \forall x \forall z((Gxz \wedge Gyz) \rightarrow x \equiv y) \wedge \forall y \exists x\ Gxy)$$

Da die Betrachtung der Existenz von Kombinationen von Ein- und Ausgaben im mathematischen Kontext unüblich ist, werden wir im Folgenden für eine verbesserte Lesbarkeit auch Funktionsvariablen verwenden.

2.3 Modellbeziehung

Die Belegung γ der zweiten Stufe ist eine Abbildung in einer Struktur $\mathfrak{A}$, die die Zuweisungen der Variablen der ersten Stufe v_i zu Elementen aus A enthält. Als Ergänzung für die zweite Stufe wird jeder Relationsvariablen V_i^n eine n-stellige Relation über A zugeordnet.
Damit lässt sich die Modellbeziehung von $\mathfrak{L}_I$ auf $\mathfrak{L}_{II}$ erweitern. Dafür sei die S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \gamma)$ definiert durch die Struktur $\mathfrak{A}$ und die Belegung zweiter Stufe γ. Die Modellbeziehung wird damit um die folgenden Regeln für Relationsvariablen in Anlehnung an die entsprechenden Regeln des Ausdruckskalküls erweitert:

a') $\mathfrak{I} \vDash \mathrm{X}t_1 \dots t_n$ gdw. $\gamma(\mathrm{X})$ trifft zu auf $\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n)$.

b') Ist X eine n-Stellige Relation:
$\mathfrak{I} \vDash \exists \mathrm{X}\varphi$ gdw. es gibt ein C $\subseteq A^n$ mit $\mathfrak{I}\frac{C}{X} \vDash \varphi$, es existiert also eine Interpretation in der die Relationsvariable X auf die Relation C abgebildet wird und die φ erfüllt.

Kapitel 3

Beispiele der Aussagekraft

3.1 Identität

Durch die Erweiterung zu $\mathfrak{L}_{II}$ ist es direkt möglich für alle Sprachen S den folgenden allgemeingültigen Satz mit der einstelligen Relationsvariable X anzugeben:

$$(+) \qquad \forall x \forall y (x \equiv y \leftrightarrow \forall X (Xx \leftrightarrow Xy))$$

Der Satz (+) geht auf das Leibniz zugeschriebene Identitätsprinzip, auch *identitas indiscerniblium* genannt, zurück. Betrachtet man Relationen als Eigenschaften von Objekten, folgt die philosophische Interpretation von (+), nach der zwei Objekte identisch sind, wenn sie in allen Eigenschaften übereinstimmen. Es wäre in der Definition der Prädikatenlogik der zweiten Stufe also im Allgemeinen auch möglich die Definition der Gleichheit mit Hilfe der Quantifizierung durch Relationsvariablen zu ersetzen.

3.2 Peano-Axiome

Die Peano-Axiome Φ_{PA} sind eine Satzmenge, deren Modelle isomorph zu der Struktur der natürlichen Zahlen $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ sein sollen. Wir betrachten dafür eine vereinfachte Form der natürlichen Zahlen $\mathfrak{N}_\sigma = (\mathbb{N}, \sigma, 0)$. Diese definiert die natürlichen Zahlen induktiv ausgehend vom Nullelement mittels der einstelligen Nachfolgerfunktion $\sigma(n) = n + 1$. Die Peano-Axiome beschreiben diese Struktur mit Hilfe der folgenden drei Sätze:

(α) Das 0-Element ist kein Wert der σ-Funktion.

(β) σ ist injektiv.

(γ) (Induktionsaxiom) Für jede Teilmenge X von $\mathbb{N}$ gilt: Ist $0 \in X$ und ist für alle $n \in X$ auch $\sigma(n) \in X$, so ist $X = \mathbb{N}$.

Während (α) und (β) in der Prädikatenlogik der ersten Stufe gebildet werden können, kann das Induktionsaxiom (γ) als Aussage über Teilmengen nicht in der ersten Stufe gebildet werden. Durch die Erweiterung zur zweiten Stufe können wir die folgenden Ausdrücke angeben:

(P1) $\forall x \neg \sigma x \equiv 0$

(P2) $\forall x \forall y (\sigma x \equiv \sigma y \to x \equiv y)$

(P3) $\forall X ((X0 \land \forall x (Xx \to X\sigma x)) \to \forall y Xy)$

3.2.1 Satz von Dedekind

Satz 3.2.1 (Satz von Dedekind)**.** *Jede Struktur $\mathfrak{A} = (A, \sigma^A, 0^A)$, die (P1) - (P3) erfüllt, ist zu $\mathfrak{N}_0$ isomorph.*

Beweis. Die Struktur $\mathfrak{A} = (A, \sigma^A, 0^A)$ erfülle (P1) - (P3). Der gesuchte Isomorphismus $\pi : \mathfrak{N}_\sigma \cong \mathfrak{A}$ muss die folgenden Verträglichkeitsbedingungen erfüllen:

(i) $\pi(0^{\mathbb{N}}) = 0^A$

(ii) $\pi(\sigma^{\mathbb{N}}(n)) = \sigma^A(\pi(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Mit den entsprechenden Interpretationen in den natürlichen Zahlen folgen:

(i)' $\pi(0) = 0^A$

(ii)' $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Diese Bedingungen definieren π induktiv über n und liefern die Verträglichkeit der Symbole. Darüber hinaus ist zu zeigen, dass diese Definition von π eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf A bildet.
Die Surjektivität von π lässt sich durch Induktion in $\mathfrak{A}$ zeigen. Zunächst folgt aus (i)', dass 0^A zum Bild von π gehört. In der Induktionsvoraussetzung nimmt man an, dass $a = \pi(n)$ im Bild von π ist, es folgt $\sigma^A(a) = \sigma^A(\pi(n))$. Aus (ii)' erhält man damit, dass $\sigma^A(a) = \pi(n+1)$ gilt und der Nachfolger $\sigma^A(a)$ somit auch im Bild von π ist.
Für π lässt sich die Injektivität induktiv über alle n zeigen mit:

(*) $\qquad$ Für alle $m \in \mathbb{N}$: Ist $m \neq n$, so ist $\pi(m) \neq \pi(n)$

Im Induktionsanfang $n = 0$ gilt $m \neq 0$, also folgt $m = k + 1$ für ein beliebiges k. Dem entsprechend gilt $\pi(m) = \pi(k+1) = \sigma^A(\pi(k))$. Da (P1) in $\mathfrak{A}$ gilt, folgt $\sigma^A(\pi(k)) \neq 0^A$ und damit $\pi(m) \neq \pi(n)$.
Im Induktionsschritt gelte (*) in n und sei $n+1 \neq m$. Ist $m = 0$, können wir wie im vorherigen Fall argumentieren. Aus $n + 1 \neq 0$ folgt durch Umformungen wie zuvor $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n)) \neq 0^A = \pi(m)$. Für $m \neq 0$ gilt $m = k+1$, wobei nach Voraussetzung $k \neq n$ gelten muss. Die Induktionsvoraussetzung liefert dann, dass $\pi(k) \neq \pi(n)$. Da $\mathfrak{A}$ das Axiom (P2) erfüllt, folgt $\sigma^A(\pi(k)) \neq \sigma^A(\pi(n))$. Durch (ii)' erhält man somit $\pi(k+1) \neq \pi(n+1)$ und es gilt $\pi(m) \neq \pi(n+1)$. $\square$

3.2.2 Die Peano-Axiome in der ersten Stufe

Das Induktionsaxiom (P3) lässt sich in der Prädikatenlogik der ersten Stufe durch ein unendliches Axiomschema ersetzen. Dieses Axiomschema umfasst für alle $x_1, \ldots, x_n, y$ und für jede Formel $\varphi \in L^S$ mit $frei(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, y\}$ ein Axiom der Form:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (\varphi \frac{0}{y} \land \forall y (\varphi \to \varphi \frac{\sigma y}{y})) \to \forall y \varphi$$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass diese Formulierung nicht ausreicht, um die natürlichen Zahlen bis auf Isomorphie zu charakterisieren. Wir werden dafür im Folgenden Theorien von Satzmengen betrachten. Für jede S-Struktur $\mathfrak{A}$ ist die Theorie definiert durch $Th(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in L_0^S | \mathfrak{A} \models \varphi\}$. Dabei sei L_0^S die Menge der S-Sätze, also die Menge der S-Ausdrücke ohne freie Variablen. Wir definieren für die Peano-Axiome Φ_{PA} die Peano-Arithmetik $\Phi_{PA}^{\models} := \{\varphi \in L_0^S | \Phi_{PA} \models \varphi\}$. Da die Struktur $\mathfrak{N}$ ein Modell von Φ_{PA} ist, folgt für die elementare Arithmetik $Th(\mathfrak{N})$ die Teilmengenbeziehung $\Phi_{PA}^{\models} \subseteq Th(\mathfrak{N})$. Im Folgenden werden wir $\Phi_{PA}^{\models} \subsetneq Th(\mathfrak{N})$ zeigen und damit die Grenze der Aussagekraft der Prädikatenlogik der ersten Stufe aufzeigen.
Zunächst betrachten wir die Programme P, welche in jedem Ausführungsschritt durch die aktuelle Programmzeile und den Inhalt der Register definiert werden. Die Registerinhalte werden dabei mit natürlichen Zahlen identifiziert. Aus der Betrachtung der Konfigurationen von P lässt sich ein S_{Ar}-Satz φ_P ableiten, für den gilt:

$$\mathfrak{N} \models \varphi_P \text{ gdw. } P : \square \to \text{stop}.$$

Der Satz φ_P beschreibt dabei, die Existenz einer Folge von Konfigurationen nach der P anhält, wenn P mit der leeren Eingabe $\square$ gestartet wird. Aus der Unentscheidbarkeit des Halteproblems folgt also auch die Unentscheidbarkeit der Arithmetik der natürlichen Zahlen für die Sätze φ_P. Die Arithmetik $Th(\mathfrak{N})$ ist somit nicht entscheidbar. Da sie aber als Theorie vollständig ist, kann sie nicht aufzählbar und somit auch nicht axiomatisierbar sein. Daraus folgt:

$$\Phi_{PA}^{\models} \subsetneq Th(\mathfrak{N})$$

Die unendliche Satzmenge für die Peano-Axiome in der ersten Stufe reicht also -anders als die Beschreibung in der zweiten Stufe- nicht, um die natürlichen Zahlen hinreichend bis auf Isomorphie zu charakterisieren.

3.3 Geordnete Körper

In der Beschreibung der natürlichen Zahlen durch die Peano-Axiome hatten wir bereits ein Beispiel gesehen, in dem wir die Erweiterung zur Prädikatenlogik der zweiten Stufe benötigten, um eine Menge bis auf Isomorphie zu definieren. Der Körper der geordneten, reellen Zahlen $\mathfrak{R}^<$ ist neben seinen Isomorphien der einzige vollständig geordnete Körper. Während sich die Axiome für geordnete Körper in der Prädikatenlogik der ersten Stufe bilden lassen, scheitert diese bei der Formulierung der Ordnungsvollständigkeit. Diese entspricht mit $S_{Ar} := \{+, \cdot, 0, 1\}$ dem S_{Ar}-Satz zweiter Stufe: "Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum". Durch die Erweiterung zur zweiten Stufe lässt sich nun der folgende Satz angeben:

$$\begin{aligned}&\forall X((\exists x Xx \land \exists y \forall z(Xz \to z < y))\\ &\quad \to \exists y(\forall z(Xz \to (z < y \lor z \equiv y)) \land \forall x(x < y \to \exists z(x < z \land Xz))))\end{aligned}$$

In diesem werden alle Teilmengen des Trägers durch die einstellige Relationsvariable X repräsentiert. Wenn die Teilmenge mindestens ein Element enthält, ist sie nicht-leer, und wenn alle Elemente der Teilmenge kleiner als ein bestimmtes Element sind, so ist die Menge auch nach oben beschränkt. Gelten diese Voraussetzungen, so soll auch die Supremumseigenschaft gelten. Es existiert also ein bestimmtes -im zweiten Teil des Satzes durch y gekennzeichnetes- Element, welches größer oder gleich allen anderen Elementen der Teilmenge ist. Insbesondere seien dann alle kleineren Elemente als y keine obere Schranke der Menge. In der Prädikatenlogik der zweiten Stufe lässt sich damit $\mathfrak{R}^<$ bis auf Isomorphie charakterisieren.

Kapitel 4

Der Satz von Löwenheim und Skolem in $\mathfrak{L}_{II}$

4.1 Definition

Satz 4.1.1 (Satz von Löwenheim und Skolem)**.** *Jede erfüllbare und höchstens abzählbare Menge von Ausdrücken ist erfüllbar über einer höchstens abzählbaren Menge.*

Satz 4.1.2. *Der Satz von Löwenheim und Skolem gilt nicht für $\mathfrak{L}_{II}$.*

4.2 Beweis

Beweis. Wir geben einen Satz $\varphi_{\text{überabz}} \in L^{\emptyset}_{II}$ an, der die überabzählbaren Strukturen charakterisiert. Für diesen gilt in allen Strukturen $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{überabz}}(X) \text{ gdw. A ist überabzählbar.}$$

Zuerst geben wir einen $L^{\emptyset}_{II}$-Ausdruck $\psi_{endl}(X)$ an, der die einstellige Relation X als einzige freie Variable, sowie die einstellige Funktionsvariable g enthält.

$$\begin{aligned}\psi_{endl}(X) := \forall g(&\forall x \forall y(Xx \wedge Xy \rightarrow (gx \equiv gy \rightarrow x \equiv y)) \\ &\rightarrow \forall x \exists y(Xx \wedge Xy \rightarrow x \equiv gy))\end{aligned}$$

Für diesen gilt:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \gamma) \models \psi_{endl}(X) &\text{ gdw. jede injektive Funktion von X in X ist surjektiv} \\ &\text{ gdw. } \gamma(X) \text{ ist endlich.}\end{aligned}$$

Mit $\psi_{endl}(X)$ lässt sich nun der $L^{\emptyset}_{II}$-Ausdruck $\varphi_{\leq abz}$ bilden, der die zweistellige Ordnungsrelationsvariable Y enthält.

$$\begin{aligned}\varphi_{\leq abz} :=& \exists Y(\forall x \neg Yxx \wedge \forall x \forall y \forall z((Yxy \wedge Yyz) \rightarrow Yxz) \\ &\wedge \forall x \forall y(Yxy \vee x \equiv y \vee Yyx) \\ &\wedge \forall x \exists X(\psi_{endl}(X) \wedge \forall y(Xy \leftrightarrow Yyx)))\end{aligned}$$

Man fordert in $\varphi_{\leq abz}$ neben den üblichen Charakteristiken einer Ordnung, dass für jedes Element nur endlich viele kleinere Elemente existieren. Für $\varphi_{\leq abz}$ gilt somit:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\leq abz}(X) \text{ gdw. A ist höchstens abzählbar.}$$

Damit ist der Satz $\varphi_{\text{üabz}} := \neg\varphi_{\leq abz}$ erfüllbar, er kann aber kein höchstens abzählbares Modell besitzen. $\square$

Kapitel 5

Der Endlichkeitssatz in $\mathfrak{L}_{II}$

5.1 Definition

Satz 5.1.1 (Endlichkeitssatz). *Die Ausdrucksmenge Φ ist erfüllbar gdw. alle endlichen Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar sind.*

Satz 5.1.2. *Der Endlichkeitssatz gilt in $\mathfrak{L}_{II}$ nicht.*

5.2 Beweis

Beweis. Wir bilden ein Gegenbeispiel mit Hilfe der folgenden zwei Ausdrücke:

$$\varphi_{\geq n} := \exists v_1 \ldots \exists v_n (\neg v_1 \equiv v_2 \wedge \cdots \wedge \neg v_1 \equiv v_n \wedge \cdots \wedge \neg v_{n-1} \equiv v_n)$$

$$\varphi_{endl} := \forall g (\forall x \forall y (gx \equiv gy \rightarrow x \equiv y) \rightarrow \forall x \exists y \; x \equiv gy).$$

Für diese gilt:

$\mathfrak{A} \models \varphi_{\geq n}$ gdw. A enthält mindestens n unterschiedliche Elemente.

$\mathfrak{A} \models \varphi_{endl}$ gdw. jede injektive Funktion von A auf A ist auch surjektiv.
gdw. A ist endlich.

Damit können wir die Ausdrucksmenge Φ bilden:

$$\Phi := \{\varphi_{endl}\} \cup \{\varphi_{\geq n} \mid n \geq 2\}$$

Alle endlichen Teilmengen Φ_0 von Φ sind erfüllbar durch endliche Mengen, die mindestens entsprechend dem größten n in Φ_0 viele Elemente enthalten. Φ ist allerdings nicht erfüllbar, da wir gleichzeitig eine endliche Menge und unendlich viele Elemente fordern. $\square$

5.3 Resultat

Für $\mathfrak{L}_I$ existiert ein adäquates System von Schlussregeln mit dem Ausdrücke auf Widerspruchsfreiheit und daraus folgend auch auf Erfüllbarkeit geprüft werden können. Da man aus der Existenz dieses Systems den Endlichkeitssatz folgern konnte, kann kein vollständiges und korrektes System von Schlussregeln in $\mathfrak{L}_{II}$ existieren. Also existiert kein Beweiskalkül mit einer Ableitbarkeitsbeziehung $\vdash$, sodass für alle $\mathfrak{L}_{II}$-Sätze und alle nicht-leeren $\mathfrak{L}_{II}$-Satzmengen Φ gilt:

$$\Phi \vDash \varphi \text{ gdw. } \Phi \vdash \varphi$$

Die Erweiterung zu $\mathfrak{L}_{II}$ ermöglicht damit -wie bereits gezeigt- eine größere Ausdruckskraft, man verliert dabei allerdings die bekannten Hilfsmittel zur Untersuchung von Ausdrücken. Dennoch ist es möglich korrekte Erweiterungen der Schlussregeln zu definieren, die dabei helfen mathematische Argumentationen zu formalisieren und diese nachzuvollziehen.

Kapitel 6

Der Satz von Trachtenbrot

6.1 Grundlagen

Wir betrachten im Folgenden Sprachen der maximalen Symbolmenge S_∞. In S_∞ sind die Konstanten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ und für jede Stelligkeit $n \geq 1$ die abzählbar vielen Relations- und Funktionssymbole $R_0^n, R_1^n, R_2^n, \ldots$ bzw. $f_0^n, f_1^n, f_2^n, \ldots$ enthalten. Damit definieren wir die folgenden Teilmengen von $L_0^{S_\infty}$, den S_∞-Sätzen erster Stufe:

(a) $\Phi_e := \{\varphi \in L_0^{S_\infty} | \varphi \text{ ist im Endlichen erfüllbar}\}$

(b) $\Phi_a := \{\varphi \in L_0^{S_\infty} | \varphi \text{ ist im Endlichen allgemeingültig}\}$

Dem entsprechend ist Φ_e die Menge der mit endlichen Strukturen erfüllbaren Sätze und Φ_a ist die Menge der Sätze, die von jeder endlichen Struktur erfüllt werden.

Lemma 6.1.1. *Φ_e ist rekursiv aufzählbar.*

Beweis. Zunächst ein Entscheidungsverfahren für jeden S_∞-Satz φ und jedes n zur Erfüllbarkeit von φ über einem $(n+1)$-elementigen Träger. Wir betrachten zu jeder $(n+1)$-elementigen Struktur eine isomorphe Struktur mit Träger $\{0, \ldots, n\}$, in welcher -durch die Isomorphie- φ äquivalent erfüllbar ist. Sei S die endliche Menge der in φ vorkommenden Symbole. Dann existieren nur die endlich vielen S-Strukturen $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_k$, da für jedes Symbol nur endlich viele Interpretationen über dem endlichen Träger $\{0, \ldots, n\}$ existieren. Für jede der S-Strukturen $\mathfrak{A}_i$ können wir die Wertetabellen der auftretenden Konstanten, Relationen und Funktionen explizit angeben. Ein S-Satz φ kann damit rekursiv bis auf atomare Ausdrücke vereinfacht werden, in welchen die Erfüllbarkeit in $\mathfrak{A}_i$ aus den Wertetabellen abgelesen werden kann.
Für das Aufzählverfahren von Φ_e bildet man für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ die endlich vielen Wörter über $\mathbb{A}$, die S_∞-Sätze mit Länge $\leq m$ sind. Mittels des obigen Verfahrens lässt sich nun für $n = 0, \ldots, m$ entscheiden, ob die Sätze über einer $(n+1)$-elementigen Menge erfüllbar sind. Man notiere die erfüllbaren Sätze. $\square$

Lemma 6.1.2. *Φ_e ist nicht entscheidbar.*

Beweis. Im Folgenden betrachten wir die von Turingmaschinen abgeleiteten Registermaschinen. Eine Registermaschine beinhaltet die Registern $R_0, \dots, R_n$, in denen zu jedem Zeitpunkt genau ein Wort aus dem Alphabet $\mathbb{A}^*$ gespeichert ist. Ein Programm auf einer Registermaschine wird durch die Angabe der Zeilen $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$ definiert, wobei jede Zeile aus einer Zeilennummer Z und einer Anweisung bestehen. Wir beschränken uns bei den mögliche Anweisungen auf die Erweiterung eines Registerinhalts um einen Buchstaben, das Entfernen des hintersten Buchstabens eines Registers, einer einfachen Fallunterscheidung und auf die Ausgabe von Registerinhalten, sowie eine Stopp-Anweisung in der letzten Zeile.
Nun sei P ein Programm über dem Alphabet $\mathbb{A} = \{|\}$ mit Konfigurationen der Form $(Z, m_0, \dots, m_n)$, wobei Z die aktuelle Zeilennummer und m_i die Anzahl der Wiederholungen von | im Register R_i darstellen. Für ein solches Programm P definieren wir zunächst $\mathfrak{A}_P$ und ψ_P wie folgt:
$\mathfrak{A}_P$ ist eine S-Struktur mit $S := \{R, <, f, c\}$ in der sich die Arbeitsweise von P beschreiben lässt. Dabei sei R eine $(n+3)$-stellige Relation, $<$ sei eine zweistellige Ordnungsrelation, f sei eine einstellige Funktion und sei $c \in S_\infty$ eine Konstante. Bei der Definition der Struktur unterscheidet man abhängig davon, ob P bei der leeren Eingabe anhält oder nicht.
Fall 1: $P : \square \to \infty$. Dann definieren wir die Trägermenge durch $A_P := \mathbb{N}$ und wählen die gewöhnliche Ordnung über den natürlichen Zahlen für $<$ und 0 für c. f sei dann die Nachfolgerfunktion und R sei definiert durch:

$$\{(s, Z, m_0, \dots, m_n) | (Z, m_0, \dots, m_n) \text{ die Konfiguration von P nach s Schritten}\}$$

Fall 2: $P : \square \to$ stop. Dann sei e das Maximum von Zeilen in P und Schritten in der Ausführung von P, also $e := max\{k, s_p\}$. Damit kann die Trägermenge limitiert werden auf $A_P := \{0, \dots, e\}$. Dem entsprechend sei $<$ die gewöhnliche Odrnung auf A_P und c sei wie zuvor 0. Die Nachfolgerfunktion f^{A_P} wird auf A^P durch $f^{A_P}(e) = e$ nach oben beschränkt. Wir behalten für R^{A_P} die gleiche Definition wie zuvor bei. Durch die Definition von e erhält man aber die Begrenzung auf A^P, da für die Zeilennummer $Z \leq k \leq e$ gilt und durch die maximale Erhöhung der Registerinhalte um Eins pro Schritt $m_0, \dots, m_n \leq s_P \leq e$ gilt.
ψ_P sei ein S-Satz, der die Arbeitsweise von P bei der leeren Eingabe $\square$ beschreibt, und sei von der Form:

$$\psi_P := \psi_0 \wedge R0 \dots 0 \wedge \psi_{\alpha_0} \wedge \dots \wedge \psi_{\alpha_{k-1}}$$

Der Teilausdruck ψ_0 fordert eine passende Definition der genutzten Funktions- und Konstantensymbole. So sei $<$ eine Ordnungsrelation, c das kleinste Elemente der Ordnung und f eine wie zuvor definiert passende Nachfolgerfunktion.

$$\begin{aligned} \psi_0 := &\varphi_< \wedge \forall x(c < x \vee c \equiv x) \wedge \forall(x < fx \vee x \equiv fx) \\ &\wedge \forall x(\exists y x < y \to (x < fx \wedge \forall z(x < z \to (fx < z \vee fx \equiv z)))) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \varphi_< := \forall x \forall y \forall z(x < y \wedge y < z \to x < z) \wedge \forall x \forall y(x < y \vee x \equiv y \vee y < x)$$

Der zweite Ausdruck fordert, dass das Programm vor der Ausführung das leere Wort in allen Registern enthält und sich dabei in der ersten Programmzeile befindet.
Die Ausdrücke $\psi_{\alpha_0}, \dots, \psi_{\alpha_{k-1}}$ beschreiben die Arbeitsweise der entsprechenden Zeilen $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$. Sie fordern die korrekten Anwendungen der Anweisung

ihrer Zeile und daraus folgend die korrekten Zustandsübergänge zwischen Konfigurationen. Im Folgenden geben wir die Umformungen für die in der Registermaschine verwendeten Anweisungen an.
Für eine Anweisung zur Erhöhung des Registers R_i in Zeile Z folgt:

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha_Z} := \forall x \forall y_0 \dots \forall y_n (RxZy_0 \dots y_n \rightarrow (x < fx \wedge \\ Rfx(Z+1)y_0 \dots y_{i-1} fy_i y_{i+1} \dots y_n))\end{aligned}$$

Für eine Verringerung des Registers R_i in Zeile Z folgt:

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha_Z} :=& \forall x \forall y_0 \dots \forall y_n (RxZy_0 \dots y_n \rightarrow (x < fx \wedge \\ &((y_i \equiv 0 \wedge Rfx(Z+1)y_0 \dots y_n) \vee (\neg y_i \equiv 0 \wedge \\ &\exists u(fu \equiv y_i \wedge Rfx(Z+1)y_0 \dots y_{i-1} u y_{i+1} \dots y_n)))))\end{aligned}$$

Für eine Fallunterscheidung in Zeile Z durch $R_i \equiv \square$ zu den Zeilen Z' beziehungsweise Z_0 gilt:

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha_Z} :=& \forall x \forall y_0 \dots \forall y_n (RxZy_0 \dots y_n \rightarrow (x < fx \wedge \\ &((y_i \equiv 0 \vee RfxZ'y_0 \dots y_n) \vee (\neg y_i \equiv 0 \vee RfxZ_0 y_0 \dots y_n))))\end{aligned}$$

Für die Ausgabe des Inhalts von R_0 durch die Zeile Z folgt:

$$\psi_{\alpha_Z} := \forall x \forall y_0 \dots \forall y_n (RxZy_0 \dots y_n \rightarrow (x < fx \wedge Rfx(Z+1)y_0 \dots y_n))$$

Aus diesen Definitionen folgt, dass falls $P : \square \rightarrow \text{stop}$ gilt, ist $\mathfrak{A}_P$ endlich und ein Modell von ψ_P, also $\psi_P \in \Phi_e$. Gilt aber $P : \square \rightarrow \infty$, sind in jedem Modell von ψ_P die Elemente paarweise verschieden und die Modelle somit unendlich, also $\psi_P \notin \Phi_e$. Damit folgt:

$$P : \square \rightarrow \text{stop gdw. } \psi_P \in \Phi_e$$

Wäre Φ_e entscheidbar, könnte man aus dem Entscheidungsverfahren für $\psi_P \in \Phi_e$ ein Entscheidungsverfahren für das Halteproblem gewinnen. Aus der Unentscheidbarkeit des Halteproblems folgt somit, dass Φ_e nicht entscheidbar sein kann. $\square$

6.2 Definition

Satz 6.2.1 (Satz von Trachtenbrot)**.** *Die Menge Φ_a der im Endlichen allgemeingültigen S_∞-Sätze ist nicht rekursiv aufzählbar.*

6.3 Beweis

Beweis. Ein Satz φ ist genau dann unerfüllbar, wenn $\neg\varphi$ allgemeingültig ist. Damit folgt für alle $\varphi \in L_0^{S_\infty}$:

$$(+) \qquad \varphi \in L_0^{S_\infty} \setminus \Phi_e \text{ gdw. } \neg\varphi \in \Phi_a.$$

Wäre Φ_a rekursiv aufzählbar, so würde aus (+) folgen, dass auch $L_0^{S_\infty} \setminus \Phi_e$ aufzählbar wäre. Das Aufzählverfahren für Φ_a müsste dafür nur stets die negierten Sätze $\neg\varphi$ notieren. Damit lässt sich ein Entscheidungsverfahren für Φ_e angeben. Für die Eingabe ζ über $\mathbb{A}$ prüft man zuerst, ob es sich um einen S_∞-Satz handelt. Falls diese Überprüfung ja ausgibt, startet man die Aufzählverfahren für Φ_e aus 6.1.1 und für $L_0^{S_\infty} \setminus \Phi_e$ aus der obigen Annahme. Sobald eines dieser Verfahren ζ ausgibt, erhält man die Entscheidung, ob $\zeta \in \Phi_e$. Dies liefert einen Widerspruch zu 6.1.2 und Φ_a kann nicht rekursiv aufzählbar sein. $\square$

Kapitel 7

Unvollständigkeit der Prädikatenlogik der zweiten Stufe

7.1 Definition

Satz 7.1.1. *Die Menge der allgemeingültigen S_∞-Sätze zweiter Stufe ist nicht rekursiv aufzählbar.*

7.2 Beweis

Beweis. Wir definieren den S_∞-Satz zweiter Stufe φ_{endl} wie in Abschnitt 5.2. Für φ_{endl} gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathrm{endl}} \text{ gdw. A ist endlich.}$$

Ein S-Satz φ ist im endlichen allgemeingültig, wenn er von allen endlichen Strukturen erfüllt wird. Es folgt mit der Definition von Φ_a für alle S_∞-Sätze φ erster Stufe:

$$(*) \qquad \varphi \in \Phi_a \text{ gdw. } \models \varphi_{endl} \rightarrow \varphi.$$

Wir nehmen an, die Menge der allgemeingültigen S_∞-Sätze zweiter Stufe sei aufzählbar. Damit kann ein Aufzählverfahren für diese gestartet werden, das für jeden ausgegebenen Satz $\varphi_{endl} \rightarrow \varphi$ mit $\varphi \in L_0^{S_\infty}$ den Satz φ der ersten Stufe notiert. Mit (*) folgt daraus die Aufzählbarkeit von Φ_a und somit ein Widerspruch zum Satz von Trachtenbrot. □

7.3 Folgerung

Korrolar 7.3.1 (Unvollständigkeit der Logik zweiter Stufe)**.** *Zu dem Folgerungsbegriff $\models$ existiert kein effektives, korrektes und vollständiges Ableitungskalkül. [Oberschelp, Arnold, Rekursionstheorie, 1993, S.251]*

Aus der Ungültigkeit des Endlichkeitssatzes in der zweiten Stufe konnte man folgern, dass kein effektives, korrektes und vollständiges Beweiskalkül für Satzmengen Φ existiert. Die Frage, ob ein Kalkül für die allgemeingültigen Sätze bei $\Phi = \emptyset$ existiert, blieb dabei offen. Mit dem Satz 7.1.1 folgt nun auch die Unvollständigkeit jedes Kalküls der allgemeingültigen Sätze der zweiten Stufe. Würde ein solches Kalkül existieren, könnte man durch eine systematische Anwendung der Schlussregeln alle Ableitungen erstellen und diese somit aufzählen. Darüber hinaus ist der Beweis für die Unvollständigkeit unabhängig von der gewählten Symbolmenge S, somit ist bereits die Menge der allgemeingültigen $\emptyset$-Sätze zweiter Stufe nicht rekursiv aufzählbar.

Während man sich bei der Definition eines Ableitungskalküls auf endlich viele, effektive und korrekte Ableitungsregeln beschränken kann, kann das daraus resultierende Kalkül also nicht gleichzeitig auch vollständig sein. So kann bei der Definition der Regeln die Effektivität, sprich die Überprüfbarkeit und Entscheidbarkeit der Anwendung der Regeln, gefordert werden. Auch die Korrektheit der Regeln kann wie folgt für die Satzmenge Φ und die Formel φ gefordert werden:

$$\Phi \vdash \varphi \implies \Phi \models \varphi$$

Die Vollständigkeit des Kalküls würde dann der Gegenrichtung entsprechen:

$$\Phi \models \varphi \implies \Phi \vdash \varphi$$

Aus der Unvollständigkeit von $\mathfrak{L}_{II}$ folgt also, dass man alle wahren oder allgemeingültigen Formeln mit einer endlichen Menge von Sätzen und Axiomen folgern kann, sie aber nicht auch alle aus einer Menge ableiten kann. Man erhält also in der Prädikatenlogik der zweiten Stufe keine Möglichkeit den Folgerungsbegriff effektiv zu kontrollieren. [vgl. Oberschelp, Arnold, Rekursionstheorie, 1993, S.251f.]

Kapitel 8

Ausblick

8.1 Schwache Prädikatenlogik zweiter Stufe

Für das System der Prädikatenlogik der zweiten Stufe $\mathfrak{L}_{II}$ haben wir gesehen, dass die für die Prädikatenlogik entscheidenden Sätze, der Satz von Löwenheim und Skolem und der Endlichkeitssatz, in dieser nicht mehr gelten. Das System der schwachen Prädikatenlogik zweiter Stufe im Folgenden $\mathfrak{L}_{II}^{w}$ ist eine Modifikation von $\mathfrak{L}_{II}$, in der versucht wird ein System zweiter Stufe anzugeben, für das die charakteristischen Sätze gelten. Dafür wird die Betrachtung der Potenzmenge der Trägermenge für die Quantifizierung von Relationsvariablen durch die Betrachtung aller endlichen Teilmengen des Trägers ersetzt.

8.1.1 Definition

Die Sprachen der schwachen Prädikatenlogik zweiter Stufe $L_{II}^{w,S}$ werden identisch zu L_{II}^{S} definiert, sodass $L_{II}^{w,S} = L_{II}^{S}$ für alle Symbolmengen S gilt. Für $\mathfrak{L}_{II}^{w}$ passen wir nur die Regel b') der Modellbeziehung an und übernehmen diese ansonsten identisch aus $\mathfrak{L}_{II}$. Für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \gamma)$ gilt in $\mathfrak{L}_{II}^{w}$:

(b') $\qquad \mathfrak{I} \vDash_w \exists X\varphi$ gdw. es gibt ein *endliches* $C \subseteq A^n$ mit $\mathfrak{I}\dfrac{C}{X} \vDash \varphi$

8.1.2 Aussagekraft

Da wir die Modellbeziehung für $\mathfrak{L}_{II}^{w}$ geändert haben, ändert sich auch die Erfüllbarkeit von Aussagen innerhalb des Systems. Wir betrachten als Beispiel für $S = \emptyset$ die $\emptyset$-Struktur $\mathfrak{A}$ mit Trägermenge $\mathbb{N}$ und den Satz $\varphi := \forall X \exists x \neg Xx$. Der Satz φ besagt, dass für alle Relationen, die wir in der Quantifizierung betrachten, mindestens ein Element existiert, das nicht Teil der Relation ist. Dieser gilt in $\mathfrak{L}_{II}$ nicht, da wir dort auch die Relation über die gesamten Trägermenge $\mathbb{N}$ erlauben. Betrachtet man allerdings nur alle endlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen wie in $\mathfrak{L}_{II}^{w}$, so ist φ erfüllbar.
Für das Beispiel gilt also:

$$\mathfrak{A} \vDash_w \varphi \text{ , aber } \mathfrak{A} \nvDash \varphi$$

Allerdings kann man zu jedem Satz $\varphi \in L_{II}^{w,S}$ einen Satz $\psi \in L_{II}^{S}$ angeben, sodass für die Modellbeziehungen in allen S-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models_w \varphi \text{ gdw. } \mathfrak{A} \models \psi$$

Dafür werden induktiv alle Teilausdrücke aus φ durch auf endliche Relationen beschränke Ausdrücke aus L_{II}^{S} ersetzt. Da $\mathfrak{L}_{II}^{w}$ durch die Beschränkung auf endliche Relationsvariablen eine abgeschwächte Aussagekraft gegenüber $\mathfrak{L}_{II}$ besitzt, ist die Gegenrichtung nicht für alle Sätze aus L_{II}^{S} möglich.

8.1.3 Satz von Löwenheim und Skolem in $\mathfrak{L}_{II}^{w}$

Durch induktives Ersetzten lässt sich aus jedem $L_{II}^{w,S}$-Satz φ ein $L_{w_1 w}^{S}$-Satz ψ mit gleichen Modellen bilden. Dabei sei $\mathfrak{L}_{w_1 w}$ eine infinitäre Sprache erster Stufe, also eine Sprache der ersten Stufe, in der abzählbar lange Disjunktionen und Konjunktionen erlaubt sind. Da das induktive Ersetzten den ursprünglichen $L_{II}^{w,S}$-Satz φ dabei nicht überabzählbar vergrößert, folgt die Gültigkeit des Satzes von Löwenheim und Skolem in $\mathfrak{L}_{II}^{w}$ aus der Gültigkeit in $\mathfrak{L}_{w_1 w}$.

8.1.4 Endlichkeitssatz in $\mathfrak{L}_{II}^{w}$

Wie in $\mathfrak{L}_{II}$ können wir auch in $\mathfrak{L}_{II}^{w}$ den Endlichkeitssatz durch Angabe eines Gegenbeispiels widerlegen. Dabei ersetzten wir den Satz φ_{endl}, durch eine Beschreibung über eine quantifizierte Relationsvariable, welche nach der modifizierten Modellbeziehung nur endliche Relationen annimmt. Wir erhalten:

$$\{\exists X \forall x X x\} \cup \{\varphi_{\geq n} | n \geq 1\}$$

Die Modifizierung war also in Hinsicht auf den Endlichkeitsatz nicht erfolgreich. In $\mathfrak{L}_{II}^{w}$ existiert also auch kein korrektes und vollständiges Ableitungskalkül.

8.2 Henkin-Semantik

Die Henkin-Semantik für die Prädikatenlogik zweiter Stufe ist eine alternative Abschwächung von $\mathfrak{L}_{II}$. So betrachtet man in der Quantifizierung von Relationsvariablen nicht die gesamte Potenzmenge über dem Träger, sondern nur explizit festgelegte Teilmengen. Daraus entstehen die sogenannten Nichtstandard-Strukturen zweiter Stufe, die über eine Teilmenge M der Potenzmenge des Trägers definiert werden. Für diese können wir wie für $\mathfrak{L}_{II}^{w}$ eine Modifikation der Modellbeziehung angeben:

(b') $$\mathfrak{I} \models \exists X \varphi \text{ gdw. es gibt ein } C \subseteq M \text{ mit } \mathfrak{I}\frac{C}{X} \models \varphi$$

Dem entsprechend betrachtet man nicht mehr alle Mengen von Elementen der Struktur, sondern nur noch die Teilmengen der Limitierung auf M. Ist ein Satz der Form $\forall X \varphi$ in einer solchen Struktur wahr, so bietet dieser Satz kein Wissen für die Gültigkeit in allen Teilmengen der Trägermenge. Man erhält somit eine schwächere Folgerungsbeziehung in Abhängigkeit vom gewählten M, welche auf Ableitbarkeit hinausläuft und weniger Ausdruckskraft als die Prädikatenlogik der zweiten Stufe besitzt. Für diese explizit limitierten Strukturen zweiter Stufe wurde die Vollständigkeit und damit auch die Existenz eines vollständigen und korrekten Ableitungskalküls bewiesen, ihre Aussagekraft übersteigt allerdings nicht die der Prädikatenlogik der ersten Stufe. [vgl. Oberschelp, Arnold, Rekursionstheorie, 1993, S.252]

Kapitel 9

Fazit

Anfangs haben wir die Erweiterung zur Prädikatenlogik der zweiten Stufe durch eine größere Aussagekraft gegenüber der ersten Stufe und durch die zentralen Folgerungen aus Aussagen der ersten Stufe motiviert. Wir haben unter anderem in der Beschreibung der Peano-Axiome gesehen, dass die Erweiterung bezüglich der Aussagekraft erfolgreich war. Dafür verliert die Prädikatenlogik der zweiten Stufe die charakteristischen Sätze der ersten Stufe. So ist die zweite Stufe zu mächtig für den beschränkenden Zusammenhang zwischen Ausdrucksmengen und den dazugehörigen Modellen aus dem Satz von Löwenheim und Skolem. Auch verliert man den Zusammenhang zwischen Ausdrucksmengen und ihren endlichen Teilmengen aus dem Endlichkeitssatz. Zuletzt haben wir die Unvollständigkeit der Prädikatenlogik der zweiten Stufe gezeigt. Es existiert somit auch kein vollständiges und korrektes Ableitungskalkül wie in der ersten Stufe. Auch die im Ausblick betrachteten alternativen Erweiterungen ähnlich der Prädikatenlogik der zweiten Stufe konnten nicht gleichzeitig die Aussagekraft der zweiten Stufe und die Hilfsmittel der ersten Stufe ermöglichen.

Die Prädikatenlogik der zweiten Stufe ist also insoweit ein Erfolg, dass mathematische Beweise in ihr präzise und formal definiert und nachvollzogen werden können. Dafür verliert man die bekannten Hilfsmittel der ersten Stufe zum maschinellen Erstellen und Überprüfen von Beweisen innerhalb der Sprache. Die Erweiterung zur zweiten Stufe hat also das Problem mit den zu komplexen Aussagen dadurch gelöst, dass sie selbst zu kompliziert für die Anwendung auf solchen Aussagen geworden ist.