



Leibniz
Universität
Hannover

Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
Institut für Theoretische Informatik

Knotentheorie

Bachelorarbeit
im Studiengang Informatik
von

Nasim Hosseinian Heidari
Matrikelnummer: 2697810

Erstprüfer: Prof. Dr. Heribert Vollmer
Zweitprüfer: Dr. rer. nat. Arne Meier
Betreuer: Dr. rer. nat. Arne Meier

Hannover, 12.03.2015

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Hannover, 12.03.2015

Nasim Hosseinian Heidari

Abbildungsverzeichnis

2.1	Kleeblattknoten	3
2.2	Unknoten	4
2.3	Triviale Verschlingung und Hopf-Verschlingung	4
2.4	Erlaubte (a) und nicht erlaubte (b) Deformationen	5
2.5	Achterknoten	5
2.6	Erlaubte (a) und nicht erlaubte (b) Projektionen	6
2.7	Das Zusammenziehen der Knoten zu einem Punkt. Diese Art von Knoten ist nicht erlaubt.	7
2.8	Reidemeister-Bewegungen	7
2.9	Ein Achterknoten, der zu seinem Spiegelbild äquivalent ist	8
2.10	Kleeblattknoten	9
2.11	Überführung (a) und maximale Überführung (b).	9
2.12	Die Regel für das Vorzeichen	10
2.13	Verschlingungszahl $+1 - 1 = 0$	10
2.14	Die WhiteheadVerschlingung (a) und Borromäische Ringe (b)	11
3.1	Eine Kreuzung aufspalten	14
3.2	Zwei Auflösungen eines Kreuzungspunktes	17
3.3	Der Auflösungsbaum des rechtshändigen Kleeblattknotens	18
3.4	Positive und negative Kreuzung L^+ und L^- und deren Auflösung	18
3.5	Die Wendungszahl des rechtshändigen und linkshändigen Kleeblattknotens	19
3.6	Flächen ohne Rand	23
3.7	Eliminieren der Kreuzungen	24
3.8	Die Kreise liegen in unterschiedlicher Höhe	24
4.1	A-Gebiete werden grau schattiert und B-Gebiete weiß	27
4.2	Der Zusammengesetzte Knoten zweier Kleeblattknotens	29

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	i
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	3
2.1 Definition eines Knotens	3
2.2 Äquivalenz von Knoten	4
2.3 Diagramme und Projektionen	5
2.4 Orientierungen	6
2.5 Reidemeister-Bewegungen	6
2.6 Klassische Knoteninvarianten	8
2.6.1 Entknotungszahl	8
2.6.2 Die Brückenzahl	9
2.6.3 Die Selbstschnittzahl	10
2.6.4 Die Verschlingungszahl	10
3 Entscheidungsprobleme	12
3.1 Reidemeister-Bewegungen	12
3.2 Entknotungsproblem	12
3.3 Splitting Problem	13
3.4 Jones-Polynom	13
3.4.1 Das Klammer-Polynom	13
3.4.2 Das Kaufmann-Polynom	18
3.4.3 Das Jones-Polynom	19
3.5 Geschlecht eines Knotens	22
3.5.1 Flächen und Homöomorphismen	22
3.5.2 Die Klassifikation von Flächen	23
3.5.3 Seifert-Flächen und das Geschlecht eines Knotens	24
4 Polynome	26
4.1 Polynome alternierender Knoten	26
4.2 Das Alexander-Polynom	28
4.3 Das Homfly-Polynom	29
4.4 Amphichiralität	30
5 Knotentypen	32
5.1 Torusknoten	32

5.2	Satellitenknoten	33
5.3	Zöpfe	33
6	Topologie	35
6.1	Komplementärraum von Knoten und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten	35
7	Die offene Probleme	38
8	Zusammenfassung	39

1 Einleitung

Die Knotentheorie ist ein Teilgebiet der algebraischen Topologie. Sie untersucht die topologischen Eigenschaften von Knoten. Die einfachste Form der Knotentheorie beinhaltet die Einbettung des Einheitskreises in einem dreidimensionalen Raum. Die Theorie tauchte erstmals Ende des 18ten Jahrhunderts auf [3]. Die meisten großen Probleme sind noch ungelöst.

Da die Knoten im Raum sehr unterschiedlich aussehen können, wird nicht sofort erkannt, ob sie wirklich verschieden sind. Dies ist ein sehr schwieriges Problem, das als „Vergleichsproblem“ bezeichnet wird. Dieses Problem wird häufig mit Hilfe von Knoteninvarianten gelöst. Eine Knoteninvariante kann eine Zahl oder ein algebraisches Objekt, wie ein Polynom sein, deren Wert sich nicht ändert, wenn der Knoten im Raum deformiert wird. Es gibt zahlreiche Knoteninvarianten, jedoch ist keine als „vollständig“ bekannt. Vollständig bedeutet, dass in allen Fällen je zwei verschiedene Knoten voneinander unterschieden werden können.

Der Anwendungsbereich der Knotentheorie ist vielfältig. In der Biochemie wird mit Hilfe der Knotentheorie überprüft, ob komplizierte Faltungen von Proteinen mit anderen Proteinen übereinstimmen. Ähnliches gilt auch für die Desoxyribonukleinsäure (DNA). Auch in benachbarten Gebieten der Mathematik findet die Knotentheorie ihren Nutzen, wie zum Beispiel in der hyperbolischen Geometrie, wobei dreidimensionale Räume untersucht werden. In spezifischen Bereichen der Physik wird sie zur Bestimmung von bestimmten topologischen Eigenschaften genutzt. Der Mathematiker Carl Friedrich Gauß fand der Verschlingungszahl eine der ersten Invarianten für Verschlingungen. Carl Friedrich Gauß beantwortete die Frage, welche Arbeit aufzuwenden ist, um einen magnetischen Pol entlang einer geschlossenen Kurve in Verbindung mit einer geschlossenen Leiterschleife zu bewegen. In diesem Zusammenhang kommt es darauf an, die Umschlingungen zweier geschlossener unendlicher Linien zu zählen. Er beantwortete die Frage durch Angabe eines Integrals, in dem die „Gauss'sche Verschlingungszahl“ als Invariante vorkommt. Die Überlegungen von Gauss erwiesen sich in mehreren Bereichen der Physik, z. B. zur Berechnung von Magnetfeldlinien, die als unendlich lange, ineinander verschlungene Fäden vorzustellen sind. Diese sind in ein elektrisch leitfähiges Plasma eingebettet, die sich wie alle Flüssigkeiten und Gase beliebig verformen können. Dabei bewegen sich die Magnetfeldlinien in der Strömung des Plasmas ohne dabei zu zereissen. Jede Verschlingung oder Verknötung der Feldlinien bleibt erhalten. es sind „topologische“ Eigenschaften des Magnetfeldes, die durch die Anwendung der Knotentheorie erklärt werden können [9].

In dieser Bachvorarbeit wird eine Einführung in die Knotentheorie, sowie ein Überblick über die Entscheidungsprobleme und die wichtigsten Konzepte in der Knotentheorie verschafft. Die Bestimmung des Ressourcenbedarf zum Lösen von Berechnungsprobleme ist eine der wichtigsten Ziele in der Komplexitätstheorie. Es wird zwischen effizient lösbaren und nicht effizient lösbaren Problemen unterschieden. Ein Entscheidungsproblem ist effizient lösbar, wenn es eine deterministische Turingmaschine gibt, die dieses Problem in polynomialer Zeit lösen kann. Die Klasse dieser Probleme wird mit P bezeichnet. Die Klasse NP enthält alle Entscheidungsprobleme, die von einer nichtdeterministischen Turingmaschine in polynomialer Zeit akzeptiert werden können. Eine äquivalente Definition für NP ist folgende: NP ist die Klasse aller Probleme, deren Instanzen sich in polynomialer Zeit verifizieren lassen [12].

2 Grundlagen

Der Begriff des mathematischen Knotens, der stets geschlossen ist, ist eine Abstraktion. Die Knoten können durch einfache Bewegungen ihre Gestalt verändern. Die größte Herausforderung ist zu entscheiden, ob zwei Knoten isomorph sind oder nicht. Dazu werden drei Bewegungen, die Reidemeister-Bewegungen herauskristallisiert und Knoteninvarianten gebildet, die diese Bewegungen überstehen. Das bedeutet, dass jedem Knotendiagramm ein Wert zugeordnet wird, sodass die Reidemeister-Bewegungen den Wert nicht ändern.

2.1 Definition eines Knotens

Die einfachsten Definitionen in der Knotentheorie basieren auf Polygonalzügen im dreidimensionalen Raum. Im Wesentlichen wird ein Knoten als eine einfache geschlossene Kurve definiert, die durch das Verbinden an mehreren Punkten gewinnt.

Zu je zwei Punkten p und q im dreidimensionalen Raum bezeichnet $[p, q]$ die Strecke, die beiden Punkte verbindet. Es sei (p_1, \dots, p_n) eine geordnete Menge voneinander verschiedener Punkte, dann ist die Vereinigung der Strecken $[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{n-1}, p_n], [p_n, p_1]$ ein *geschlossener Polygonzug*. Wenn jede Strecke genau zwei andere Strecken schneidet (jede an einem Endpunkt), dann wird die Kurve als *einfach* bezeichnet. Beachte, dass insbesondere die Strecken AB und CD sich nicht schneiden.

Ein *Knoten* ist ein einfacher geschlossener Polygonzug in \mathbb{R}^3 [7].

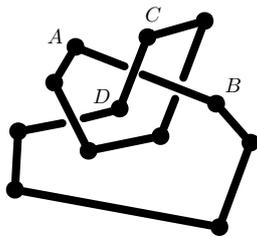


Abbildung 2.1: Kleeblattknoten

In Abbildung 2.1 ist der nichttriviale Knoten, der sogenannte *Kleeblattknoten* als ein Polygonzug dargestellt. Als *Unknoten* oder trivialer Knoten wird der in Abbildung 2.2 dargestellte Knoten definiert. Er wird durch drei nicht kollineare Punkte festgelegt. Man nennt Punkte, die auf einer Geraden liegen, kollinear.

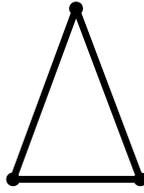


Abbildung 2.2: Unknoten

Glatte Kurven (siehe Abbildung 2.3) sind polygonale Kurven (siehe Abbildung 2.1) mit einer sehr großen Anzahl an Strecken. Ein glatter Knoten kann sehr genau durch einen Polygonzug approximiert werden. Dabei werden die Knoten nur aus ästhetischen Gründen glatt gezeichnet.

Eine *Verschlingung* ist die endliche Vereinigung disjunkter Knoten. Insbesondere ist ein Knoten eine Verschlingung mit einer Komponente. Als *triviale Verschlingung* wird eine Vereinigung von Unknoten bezeichnet, die durch eine Ebene voneinander getrennt werden kann (siehe Abbildung 2.3).

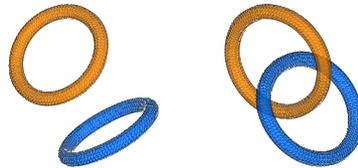


Abbildung 2.3: Triviale Verschlingung und Hopf-Verschlingung

2.2 Äquivalenz von Knoten

Im folgendem Kapitel wird die Deformation eines Knotens mathematisch formuliert.

Definition 1. Ein Knoten J heißt *elementare Deformation* des Knotens K , falls einer der beiden Knoten durch eine Folge von Punkten (p_1, \dots, p_n) , der andere durch die Folge (p_0, p_1, \dots, p_n) bestimmt ist, wobei

1. der Punkt p_0 nicht kollinear mit p_1 und p_n ist und
2. das von (p_0, p_1, p_n) aufgespannte Dreieck den durch (p_1, \dots, p_n) bestimmten Knoten nur in der Strecke $[p_1, p_n]$ schneidet.

Ein Dreieck ist die von den drei Rändern $[p_0, p_1]$, $[p_1, p_n]$ und $[p_n, p_0]$ begrenzte ebene Fläche. Die formale Definition lautet:

$$T := xp_0 + yp_1 + zp_n, \text{ wobei } 0 < x, y, z \text{ und } x + y + z = 1$$

Die zweite Bedingung in der Definition stellt sicher, dass der Knoten bei der Durchführung einer elementaren Deformation sich selbst nicht durchkreuzt. Die Abbildung ?? (a) zeigt

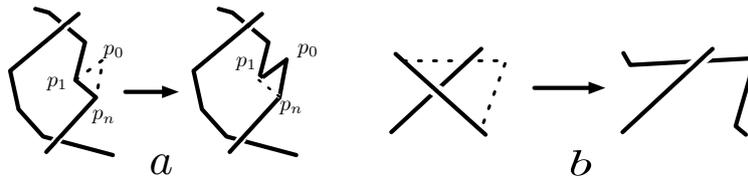


Abbildung 2.4: Erlaubte (a) und nicht erlaubte (b) Deformationen

eine elementare Deformation, und die Abbildung 2.4 (b) stellt eine nicht erlaubte Deformation dar.

Zwei Knoten K und J heißen *äquivalent*, wenn es eine Folge von Knoten $K = K_0, K_1, \dots, K_n = J$ gibt, so dass K_i für jedes $i > 0$ eine elementare Deformation von K_{i-1} ist.

In der Knotentheorie werden die Äquivalenzklassen von Knoten untersucht. Es zu beweisen, dass es unmöglich ist, einen Knoten in einen anderen Knoten zu deformieren, ist zum Beispiel dasselbe, wie zu beweisen, dass die beiden Knoten in verschiedenen Äquivalenzklassen liegen. Der Beweis dafür, dass ein Knoten nicht trivial ist, besteht darin zu zeigen, dass er nicht in der Äquivalenzklasse des trivialen Knotens liegt.

2.3 Diagramme und Projektionen

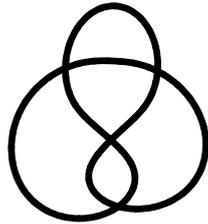


Abbildung 2.5: Achterknoten

Eine Funktion, die einem Tripel (x, y, z) das Paar (x, y) zuordnet, heißt Projektionsabbildung. Eine Projektion des Achterknotens ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Ist die Kurve einmal auf die Ebene projiziert, so ist nicht mehr klar, welche Abschnitte des Knotens über den anderen Teilen liegen. Um diesen Informationsverlust zu beheben, wird eine Lücke in den Zeichnungen der Projektion gelassen, um zu kennzeichnen, welche Teile des Knotens unter anderen Teilen hindurchlaufen. Eine solche Zeichnung wird als *Knotendiagramm* bezeichnet.

Viele unterschiedliche Knoten können das gleiche Diagramm besitzen. Das Diagramm zeigt lediglich an, dass gewisse Abschnitte des Knotens oberhalb von anderen Teilen verlaufen, aber nicht, wie weit sie oberhalb verlaufen. Wenn zwei Knoten das gleiche Diagramm besitzen, dann sind sie äquivalent.

Eine erlaubte Projektion wird in Abbildung 2.6 (a) dargestellt. Wird der Knoten ein wenig im Raum gedreht, dann besitzt der resultierende Knoten, die in Abbildung 2.6

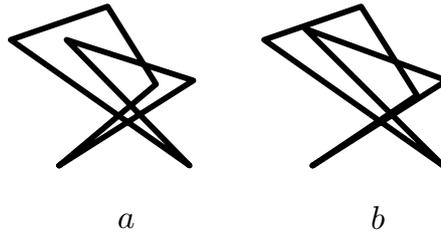


Abbildung 2.6: Erlaubte (a) und nicht erlaubte (b) Projektionen

(b) gezeigten, nicht erlaubten Projektion. Solche Knotenprojektionen müssen vermieden werden, da durch diese Projektionen zu viele Informationen verloren gehen.

Definition 2. *Eine Knotenprojektion heißt reguläre Projektion, wenn nie drei Punkte des Knotens auf denselben Punkt projiziert werden, und kein Eckpunkt auf denselben Punkt projiziert wird, wie irgendein anderer Punkt des Knotens.*

2.4 Orientierungen

Ein *orientierter* Knoten besteht aus einem Knoten und einer Anordnung seiner Eckpunkte. Zwei Anordnungen als *äquivalent* bezeichnet, wenn sie sich nur in einer zyklischen Permutation unterscheiden.

Der Begriff der Äquivalenz von Knoten kann leicht auf den orientierten Fall übertragen werden. Ist ein Knoten orientiert, dann führt eine elementare Deformation dieses Knotens zu einem Knoten, der auf natürliche Weise eine Orientierung besitzt.

Definition 3. *Zwei orientierte Knoten heißen orientiert äquivalent, falls es eine Folge elementarer Deformationen gibt, die den einen orientierten Knoten in den anderen überführt.*

Eines der schwierigsten Probleme in der Knotentheorie ist Probleme die Unterscheidung von Äquivalenz und orientierter Äquivalenz. H. Trotter beschrieb im Jahr 1963 die ersten Beispiele von Knoten, die äquivalent, aber nicht orientiert äquivalent sind.[10]

2.5 Reidemeister-Bewegungen

In der Knotentheorie werden Reidemeister-Bewegungen als drei lokale Bewegungen von Knotendiagrammen bezeichnet. Zwei Verschlingungsdiagramme stellen äquivalente Verschlingungen dar genau dann, wenn sie sich durch eine endliche Anzahl von Reidemeister-Bewegungen vom Typ I, II, III und ebenen Isotopien ineinander überführen lassen. Die drei Bewegungen entsprechen lokal den in Abbildung 2.8 abgebildeten Bewegungen, der Rest des Diagramms bleibt unverändert. Der Knoten in dreidimensionalen Raum, der sich nicht selbst durchdringt, heißt Raum-isotopie. Das Wort Isotopie bezeichnet die Deformation des Knotens. Die Bezeichnung „Raum“ bringt zum Ausdruck, dass diese

Deformation im dreidimensionalen Raum erfolgt.

Wird die Projektionsebene so verformt, als wäre sie aus Gummi und die Verformung an der Projektion vollzogen, so wird die entstandene Deformation einer Knotenprojektion, als *ebene Isotopie* definiert. Der Zusatz „eben“ bedeutet, dass die Knoten nur in der Projektionsebene deformiert sind.

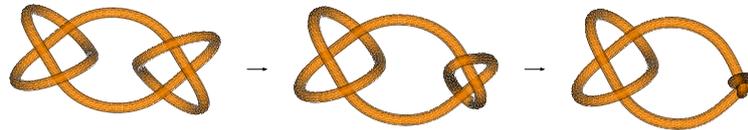


Abbildung 2.7: Das Zusammenziehen der Knoten zu einem Punkt. Diese Art von Knoten ist nicht erlaubt.

Eine *Reidemeister-Bewegung* ist eine der drei nachfolgenden beschriebenen Möglichkeiten, die Projektion eines Knotens durch Änderung der Art der Kreuzungen zu modifizieren.

1. Bei der *ersten Reidemeister-Bewegung* wird dem Knoten eine Schlaufe hinzugefügt oder eine aus ihm herausgenommen.
2. Die *zweite Reidemeister-Bewegung* gestattet das Hinzufügen oder Entfernen von zwei Kreuzungen.
3. Die *dritte Reidemeister-Bewegung* gestattet, einen Strang des Knotens von einer Seite der Kreuzung auf die andere zu verlegen.

Jede dieser Bewegungen verändert die Projektion des Knotens, aber nicht den Knoten, der durch die Projektion dargestellt wird.

Im Jahre 1926 erbrachte der deutsche Mathematiker Kurt Reidemeister den Beweis dafür, dass wenn zwei unterschiedliche Projektionen eines Knotens vorliegen, durch eine Folge von Reidemeister-Bewegungen und ebenen Isotopien von einer Projektion, zur anderen Projektion gelangt werden kann.[11]

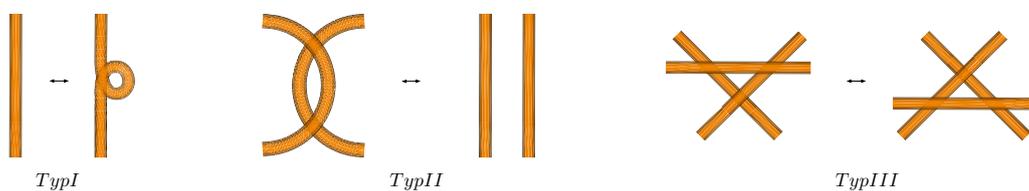


Abbildung 2.8: Reidemeister-Bewegungen

Ein Knoten, der seinem Spiegelbild gleicht, wird in der Mathematik *amphichiral* genannt (siehe Abbildung 2.9).

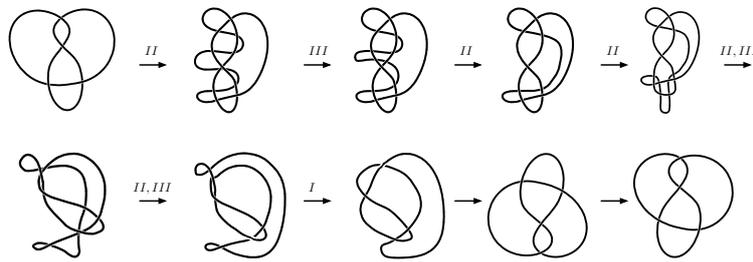


Abbildung 2.9: Ein Achterknoten, der zu seinem Spiegelbild äquivalent ist

Um festzustellen, ob zwei Projektionen denselben Knoten darstellen, muss nur eine Folge von Reidemeister-Bewegungen existieren, die von einer Projektion in die andere überführt werden kann. Es gibt für die Anzahl der Reidemeister-Bewegungen, die erforderlich sind, um von einer Projektion zur anderen zu gelangen, keine obere Grenze. Weisen die beiden ursprünglichen Projektionen je 10 Kreuzungen auf, muss die Anzahl der Kreuzungen im Laufe der Ausführung der Reidemeister-Bewegung auf 1000 erhöht werden, bevor die Bewegungen die Anzahl der Kreuzungen der Projektion wieder auf 10 reduzieren. Die Kleeblattschlinge beispielsweise ist nicht amphichiral, jedoch ist kein Beweis dieser Tatsache bekannt, der die Reidemeister-Bewegungen verwendet.

2.6 Klassische Knoteninvarianten

Die Eigenschaften eines Knotens, die bei der Abänderung des Knotens durch die Reidemeister-Bewegungen erhalten bleiben, werden Knoteninvarianten genannt. Stimmt die Invariante eines Knotens nicht mit der Invariante eines weiteren Knotens überein, dann sind die beiden Knoten nicht äquivalent. Umgekehrt kann nicht davon ausgegangen werden, dass Knoten, die dieselbe Invariante besitzen, isotop sind. In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die Knoteninvariante, die jedem Knoten eine Zahl zuordnet, verschafft.

2.6.1 Entknotungszahl

Ein Knoten hat die Entknotungszahl n , wenn es ein Diagramm des Knotens gibt, welches durch die Änderung von n Überkreuzungen in Unterkreuzungen zu einem Diagramm des trivialen Knotens wird und es kein anderes Knotendiagramm gibt, bei dem weniger als n Änderungen zu einem Diagramm des Unknotens führen.

Gegeben sei das Verschlingungsdiagramm einer Verschlingung V . Sei N die Anzahl der Kreuzungen. Sei S die minimale Anzahl der Kreuzungen, die geändert werden, um die triviale Verschlingung zu erhalten. Die Komplexität eines Verschlingungsdiagramms wird als ein Paar (N, S) definiert.

2.6.2 Die Brückenzahl

In Abbildung 2.10 ist eine unübliche Projektion des Kleeblattknotens dargestellt. Die fett gezeichneten Teile der Knoten liegen oberhalb und die dünn gezeichneten unterhalb der Ebene. Jeder Knoten schneidet die Ebene in vier Punkten. Dieses ist die kleinste Anzahl unverknoteter Bögen, die in ihren Projektionen auftreten können. Aus diesem Grund ist die Brückenzahl auf zwei festgesetzt.

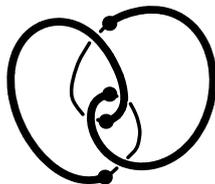


Abbildung 2.10: Kleeblattknoten

Wenn eine allgemeine Projektion eines Knotens K in der Ebene gegeben ist, dann ist die „Überführung“ ein Teilbogen des Knotens, der oberhalb von mindestens einer Kreuzung und niemals unterhalb einer Kreuzung verläuft. Eine „maximale Überführung“ ist eine, die in dieser Weise nicht mehr verlängert werden kann (siehe Abbildung 2.11). Die beiden Endpunkte einer maximalen Überführung befinden sich hinter einer unterliegenden Kreuzung. Die Brückenzahl der Projektion ist die Anzahl der darin vorhandenen maximalen Überführungen (d.h. die maximale Überführung, die die Brücken über die restliche Knotenteile bilden). Es gibt für jede Kreuzung eine maximale Überführung, die sie oberhalb kreuzt. Die „Brückenzahl“ von K ist als kleinste unter den Brückenzahlen aller Projektionen von K definiert.

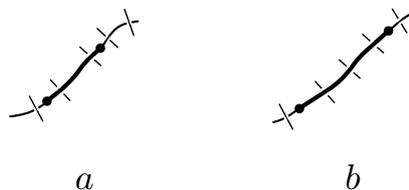


Abbildung 2.11: Überführung (a) und maximale Überführung (b).

Die Knoten mit der Brückenzahl zwei bilden eine spezielle Klasse von Knoten, die sogenannten „Zwei-Brückenknoten“. Wenn ein Zwei-Brückenknoten durch die Projektionsebene in zwei Teile zerschnitten wird, dann werden zwei unverknotete, nicht miteinander verschlungene Bögen oberhalb der Projektionsebene erstellt. Diese entsprechen den beiden maximalen Überführungen, sowie zwei solche Bögen unterhalb der Projektionsebene. Diese Bögen sind unverknotet und nicht miteinander verschlungen, denn alle diese Kreuzungen stammen von einer maximalen Überführung und einem dieser Bögen ab.

Von Claus Ernst und DeWitt Sumners wurde bewiesen, dass die Anzahl aller Zwei-
brückenknöten mit n Kreuzungen mindestens $(2^{n-2} - 1)/3$ ist. Da die Zwei-
brückenknöten prim sind, folgt daraus, dass die Anzahl der Primknöten mit n Kreuzungen ebenfalls min-
destens $(2^{n-2} - 1)/3$ ist. Dabei werden ein Knöten und sein Spiegelbild als verschieden
betrachtet.

2.6.3 Die Selbstschnittzahl

Die Selbstschnittzahl eines Knöten K ist die kleinste, in irgendeiner Projektion von K
auftretende Anzahl von Kreuzungen. Für die Berechnung wird eine Projektion von K
mit irgendeiner Anzahl n von Kreuzungen genutzt. Die Selbstschnittzahl ist kleiner oder
gleich n . Sollten alle Knöten mit weniger als n Kreuzungen bekannt sein und der Knöten
 K taucht unter diesen nicht auf, so ist die Selbstschnittzahl gleich n .

2.6.4 Die Verschlingungszahl

Dieser Abschnitt beschränkt sich auf die Verschlingungen mit zwei Komponenten. Sei
ein orientiertes Verschlingungsdiagramm mit zwei nummerierten Komponenten gegeben.
Das Vorzeichen jeder Kreuzung wird nach der Regel wie in Abbildung 2.12 berechnet.
Alle Vorzeichen der Kreuzungen werden summiert, an denen die zweite Komponente über
die erste läuft. Das Resultat heißt Verschlingungszahl. Beim Umdrehen der Orientierung
einer der Komponenten ändert sich das Vorzeichen jeder Kreuzung und als Resultat das
Vorzeichen der Verschlingungszahl (siehe Abbildung 2.13).

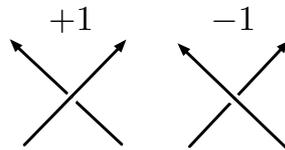


Abbildung 2.12: Die Regel für das Vorzeichen

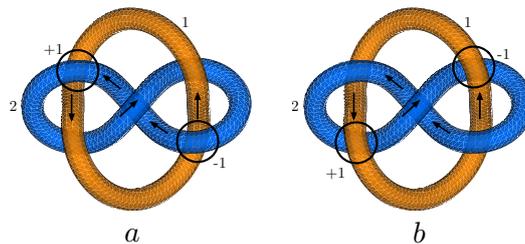


Abbildung 2.13: Verschlingungszahl $+1 - 1 = 0$.

Satz 2.6.1. *Die Verschlingungszahl ist eine Invariante der orientierten Verschlingung
mit zwei Komponenten.*

Es folgen zwei Bemerkungen:

1. Keine Änderung der Verschlingungszahl beim Vertauschen der Rollen der beiden Komponenten.
2. Wenn die Verschlingungszahl Null ist, heißt es nicht, dass die Komponenten auseinandergezogen werden können (siehe Abbildung 2.14) (a).

Ein sonderbares Beispiel ist in Abb. 2.14 (b) gezeigt. Diese Verschlingung hat drei Komponenten, wobei je zwei davon die Verschlingungszahl Null haben. Die drei Komponenten werden nicht auseinandergezogen. Wenn eine Komponente weggelassen wird, ist der Rest eine triviale Verschlingung aus zwei Komponenten.

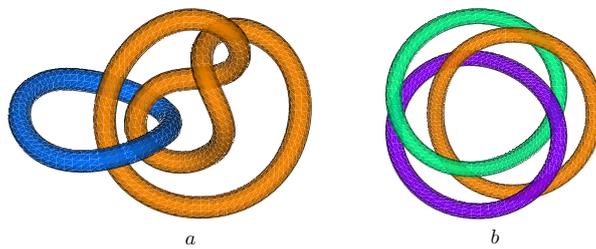


Abbildung 2.14: Die WhiteheadVerschlingung (a) und Borromäische Ringe (b)

3 Entscheidungsprobleme

In diesem Kapitel werden die Entscheidungsprobleme in der Knotentheorie vorgestellt. Des Weiteren wird definiert, wann eine Sprache entscheidbar ist.

Definition 4. *Eine Sprache A ist entscheidbar, falls ein Algorithmus existiert, der bei Eingabe w nach endlicher Zeit stoppt und „ja“ ausgibt, falls $w \in A$, und „nein“ ausgibt, falls $w \notin A$.*

Definition 5. *Eine Sprache A ist semi-entscheidbar, falls ein Algorithmus existiert, der bei Eingabe w nach endlicher Zeit stoppt und „ja“ ausgibt, falls $w \in A$, und in eine Endlosschleife gerät, falls $w \notin A$. [13]*

3.1 Reidemeister-Bewegungen

In der Theorie sind zwei Knoten, deren Knotendiagramme sich nicht durch die Reidemeister-Bewegungen ineinander überführen lassen, nicht äquivalent. Die praktische Anwendung des Reidemeister-Theorems ist schwierig. Wenn es nicht gelingt zwei Diagramme durch die Reidemeister-Bewegungen ineinander überzuführen, bedeutet das nicht, dass nicht doch eine Folge von Reidemeister-Bewegungen existiert, die dies ermöglicht. Da es unendlich viele Kombinationsmöglichkeiten von Reidemeister-Bewegungen gibt, existiert keine Möglichkeit, nur unter Anwendung von Reidemeister-Bewegungen zu beweisen, dass zwei Knoten nicht äquivalent sind. Es gibt für die Anzahl der Reidemeister-Bewegungen, die erforderlich sind, um von einer Projektion zur anderen zu gelangen, keine obere Grenze. Das Problem zwei Knoten mit Hilfe von Reidemeister-Bewegungen zu unterscheiden, ist **semi-entscheidbar**. Wenn es sich um zwei äquivalente Knoten handelt, ist nicht garantiert, ob das Programm terminiert.

3.2 Entknotungsproblem

Eine den trivialen Knoten repräsentierende Kurve ist wie folgt definiert:

$$(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1 \subset \mathbb{R}^3$$

Ein Knoten ist ein trivialer Knoten, wenn er durch eine stetige Verformung (ohne Zerschneidung) in die obige Kurve überführt werden kann.

Im Jahre 1961 hatte der Mathematiker Wolfgang Haken nach zehn Jahren seiner Arbeit seine Theorie der Normalflächen ausgebreitet. Das Ziel war es, die Knoten von den Unknoten zu unterscheiden. Dazu verwendete er die Mittel der Topologie, besonders

ein Ergebnis von Herbert Seifert aus den 1930er Jahren: Man kann in jeden Knoten eine Seifertfläche einspannen, die von dem Knoten begrenzt wird. Ist der Knoten ein einfacher Kreisknoten, dann ist die Seitenfläche eine Kreisscheibe. Dabei wird die vom Knoten aufgespannte Fläche glatt gebogen, während ein komplizierter Knoten entworfen wird, biegt man zugleich die von ihm aufgespannte Fläche glatt. Wolfgang Haken hat gezeigt, dass das „Unverknotetsein“ entscheidbar ist, jedoch analysierte nicht die Komplexität im Detail.

Joel Hass, Jeff Lagarias und Nick Pippinger 1999, dass das „Unverknotetsein“ in der Komplexitätsklasse NP liegt. Sie betrachteten in einem Aufsatz Wolfgang Hakens Algorithmus als eine Art Maschine, die für jeden noch so kompliziert verschlungenen Unknoten relativ kurze Beweise dafür produziert, dass der betreffende Knoten der Unknoten ist.[4]

Für den Fall, dass sich der Knoten nicht durch die Reidemeister-Bewegungen zu einem einfachen Kreis entwirren lässt, hat Greg Kuperberg 2011 entdeckt, dass für jeden Knoten sich ein Zertifikat herstellen lässt, das eindeutig belegt, dass dieser Knoten der Unknoten, oder komplizierter als der Unknoten ist. Für diesen Beweis nutzte Kuperberg die Riemann-Vermutung, was bis heute eines der größten Rätsel der Mathematik ist. Er bewies auch, dass „Verknotetsein“ in $co-NP$ liegt.

Die Anzahl der Reidemeister Bewegungen, die erforderlich sind, um ein Unknot Diagramm auf einen Kreis zu überführen ist höchstens exponentiell in der Anzahl der Kreuzungen. Der Brute-Force-Algorithmus erkennt „Unverknotetsein“ mit alle Folgen von Reidemeister-Bewegungen in doppelt exponentieller Zeit. [8]

3.3 Splitting Problem

Das Splitting Problem ist eine Verallgemeinerung vom Unverknotetsein. Eine Verschlingung ist splittable, wenn sich durch stetige Deformationen auf die Ebene, eine oder mehrere Schlingen auflösen lassen. Das Wort „Ebene“ kann durch „Sphäre“ ersetzt werden. Wolfgang Haken hat gezeigt, dass das Splitting-Problem entscheidbar ist. Im Jahr 2008 wurde bewiesen, dass es in NP liegt. [4]

3.4 Jones-Polynom

Das Jones-Polynom ist auf orientierte Verschlingungsdiagramme definiert. Allerdings verändert es sich für Knoten nicht, wenn die Orientierung umkehrt wird. Im Folgenden wird das Jones-Polynom nach dem Ansatz von Kaufman hergestellt.

3.4.1 Das Klammer-Polynom

Im Folgenden wird ein Polynom für die Verschlingungen konstruieren, indem ein gegebenes Verschlingungsdiagramm aufgespalten wird. Wenn eine Kreuzung entlang einer Markierung aufgespalten ist, wird dieses folgendermaßen notiert:

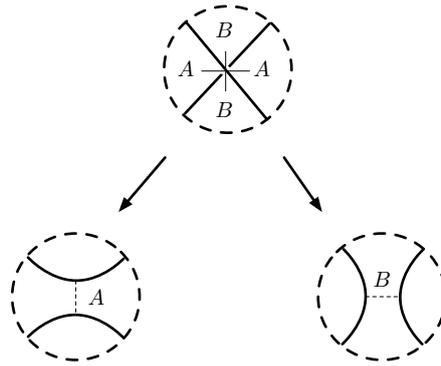


Abbildung 3.1: Eine Kreuzung aufspalten

Die Regionen, die ein Beobachter zu seiner Linken sieht, wenn er auf dem unterkreuzenden Zweig auf die Kreuzung zugeht, gehören zur A -Markierung. Die Regionen zu seiner Rechten gehören zur B -Markierung.

Polynomiale Invarianten von Knoten und Verschlingungen erfüllen einige Bedingungen. Als Bezeichnung des Klammer-Polynoms eines Knotens K wird das Symbol $\langle K \rangle$ verwendet. Dann lautet diese Regel:

$$\text{Regel 1: } \langle \bigcirc \rangle = 1$$

$$\text{Regel 2: } \begin{cases} \langle \bigcirc \otimes \bigcirc \rangle = A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + B \langle \bigcirc \bigcirc \rangle \\ \langle \bigcirc \otimes \bigcirc \rangle = A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + B \langle \bigcirc \bigcirc \rangle \end{cases}$$

$$\text{Regel 3: } \langle L \cup \bigcirc \rangle = C \langle L \rangle$$

wobei L eine Verschlingung, \cup die disjunkte Vereinigung zweier Verschlingungen, \bigcirc das triviale Knotendiagramm, also ein Kreis und C eine unbestimmte Variable sind.

Das bedeutet, dass wenn zu der Verschlingung eine zusätzliche triviale Komponente addiert wird, die nicht verknötet ist, wird das gesamte Polynom mit C multipliziert. Das Polynom soll eine Invariante der Verschlingung sein. Das ist die wichtigste Bedingung, der es genügen muss. Diese hat zur Folge, dass das Ergebnis der Rechnungen nicht von der speziellen Projektion abhängen darf, von der ausgegangen wurde. *Es ändert sich nicht bei den Reidemeister-Bewegungen.* Als nächstes wird betrachtet, was mit dem Polynom bei der Anwendung von den Reidemeister-Bewegungen geschieht. Es wird die Wirkung vom Typ II auf ein Polynom betrachtet.

$$\begin{aligned}
\langle \text{Diagram 1} \rangle &\stackrel{2}{=} A \langle \text{Diagram 2} \rangle + B \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
&\stackrel{2}{=} A(A \langle \text{Diagram 4} \rangle + B \langle \text{Diagram 5} \rangle) + B(A \langle \text{Diagram 6} \rangle + B \langle \text{Diagram 7} \rangle) \\
&\stackrel{3}{=} A(A \langle \text{Diagram 8} \rangle + BC \langle \text{Diagram 9} \rangle) + B(A \langle \text{Diagram 10} \rangle + B \langle \text{Diagram 11} \rangle) \\
&\Leftrightarrow (A^2 + ABC + B^2) \langle \text{Diagram 12} \rangle + BA \langle \text{Diagram 13} \rangle \stackrel{?}{=} \langle \text{Diagram 14} \rangle
\end{aligned}$$

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = (A^2 + ABC + B^2) \langle \text{Diagram 12} \rangle + BA \langle \text{Diagram 13} \rangle \stackrel{?}{=} \langle \text{Diagram 14} \rangle$$

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = 0 \langle \text{Diagram 12} \rangle + 1 \langle \text{Diagram 13} \rangle = \langle \text{Diagram 14} \rangle$$

Damit das Polynom sich bei dieser Bewegung nicht ändert, wird $B = A^{-1}$ gesetzt, um zu erreichen, dass der Koeffizient vor dem vertikalen Geflecht eins wird. In dem sich ergebenden Polynom tritt kein B mehr auf. Wird einmal B durch A^{-1} ersetzt, so muss offenbar $A^2 + C + A^{-2} = 0$ sein, damit der Koeffizient vor dem ersten horizontalen Geflecht null wird. Das heißt, dass $C = -A^2 - A^{-2}$ gesetzt werden muss. Nach dieser Voraussetzung ist das Klammer-Polynom invariant unter der Reidemeister-Bewegungen von Typ II. Folglich werden drei Regeln von jetzt an in der folgenden Form erscheinen.

$$\text{Regel 4: } \langle \bigcirc \rangle = 1$$

$$\text{Regel 5: } \begin{cases} \langle \text{Diagram 15} \rangle = A \langle \text{Diagram 16} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 17} \rangle \\ \langle \text{Diagram 18} \rangle = A \langle \text{Diagram 19} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 20} \rangle \end{cases}$$

$$\text{Regel 6: } \langle L \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$$

Als nächstes wird die Auswirkung der dritten Reidemeister-Bewegung auf das Polynom betrachtet.

$$a) \langle \text{Diagram 1} \rangle \stackrel{5}{=} A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle$$

$$b) \langle \text{Diagram 1} \rangle \stackrel{5}{=} A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle$$

Offenbar gilt:

$$\langle \text{Diagram 2} \rangle = \langle \text{Diagram 3} \rangle,$$

da beide Diagramme Isotop sind. Wird Typ II Invarianz jeweils auf die linken Seiten der Gleichungen a) und b) angewendet, ergibt sich

$$\langle \text{Diagram 2} \rangle = \langle \text{Diagram 3} \rangle = \langle \text{Diagram 4} \rangle.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen a) und b) sind jetzt Term für Term gleich. Also gilt dies auch für die linken Seiten, und dies beweist, dass das Polynom invariant unter der Reidemeister-Bewegung von Typ III ist.

Nun wird betrachtet, was bei der Anwendung einer Reidemeister-Bewegung vom Typ I mit dem Klammer-Polynom geschieht. Das Polynom hängt von der vorgegebenen Knotenprojektion ab.

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &\stackrel{5}{=} A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\ &\stackrel{6}{=} A(-A^2 - A^{-2}) \langle \text{Diagram 4} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 5} \rangle \\ &\Leftrightarrow -A^3 \langle \text{Diagram 4} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \text{Diagram 1} \rangle &\stackrel{5}{=} A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
&\stackrel{6}{=} A \langle \text{Diagram 4} \rangle + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \langle \text{Diagram 4} \rangle \\
&\Leftrightarrow -A^{-3} \langle \text{Diagram 4} \rangle
\end{aligned}$$

Ein Kreuzungspunkt wird auf zwei Arten aufgelöst, indem L in L_A und L_B überführt wird (siehe Abbildung 3.2). Insgesamt führt dies zu 2^n verschiedenen Auflösungen des Verschlingungsdiagramms, wobei n die Anzahl der Kreuzungspunkte bezeichnet (siehe Abbildung 3.3). Wird in einem Diagramm für jeden Kreuzungspunkt eine der beiden Lösungsmöglichkeiten A oder B festgelegt, so heißt dies einen Zustand des Diagramms. Jeder Kreuzungspunkt erhält den Zustand A oder B . Jedes Diagramm mit n Kreuzungspunkten hat 2^n mögliche Zustände.

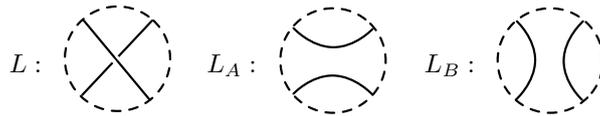


Abbildung 3.2: Zwei Auflösungen eines Kreuzungspunktes

Für jeden Zustand s des Diagramms von L sei $\alpha(s)$ die Anzahl der A -Markierungen. Sei $\beta(s)$ die Anzahl der B -Markierungen, und sei $\gamma(s)$ die Anzahl der geschlossenen Kreise, die nach Auflösen der Kreuzungspunkte in L_A bzw. L_B entstehen. Die Betrachtung des Auflösungsbaums führt zu folgender Formel:

$$\langle L \rangle = \sum_s A^{\alpha(s)} B^{\beta(s)} C^{\gamma(s)-1}$$

Also gilt:

$$\langle L \rangle = \sum_s A^{\alpha(s)} A^{-\beta(s)} (-A^2 - A^{-2})^{\gamma(s)-1}$$

Beispiel 3.4.1. *Klammer-Polynom des rechtshändigen Kleeblattknotens.*

$$\begin{aligned}
\langle L \rangle &= A^3 B^0 C^1 + A^2 B^1 C^0 + A^2 B^1 C^0 + A^1 B^2 C^1 \\
&\quad + A^2 B^1 C^0 + A^1 B^2 C^1 + A^1 B^2 C^1 + A^1 B^3 C^2 \\
&= A^3 C + 3A^2 B + 3AB^2 C + B^3 C^2
\end{aligned}$$

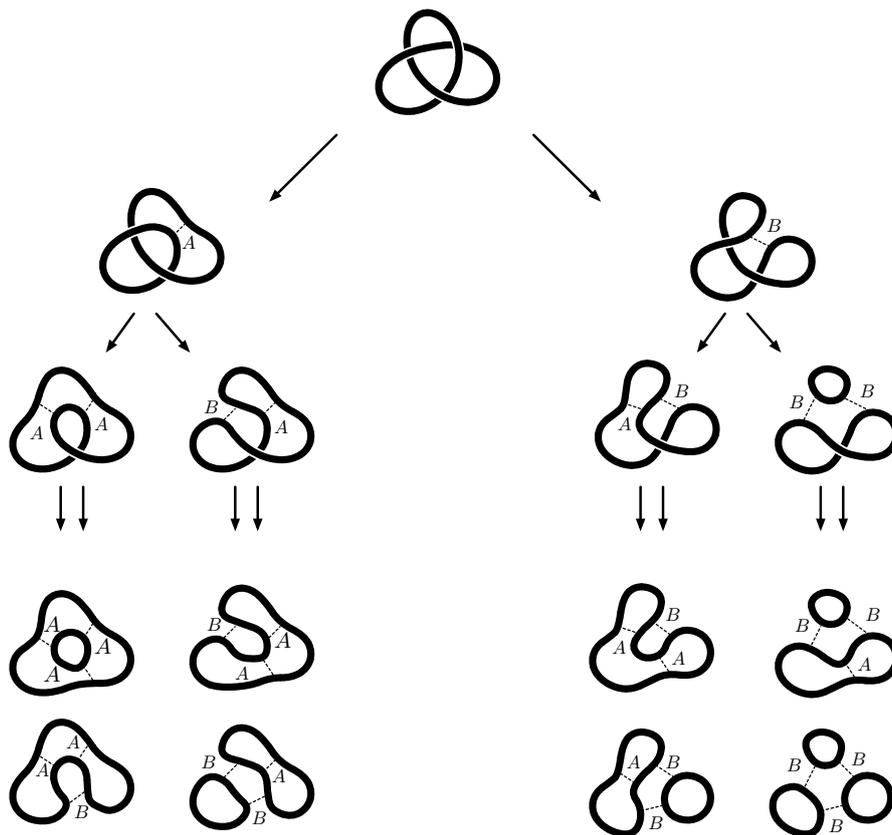


Abbildung 3.3: Der Auflösungsbaum des rechtshändigen Kleeblattknotens

für B , A^{-1} und für C , $(-A^2 - A^{-2})$ einsetzen. Dann erhält man:

$$\begin{aligned}
 \langle L \rangle &= A^3(-A^2 - A^{-2}) + 3A^{-2}A^{-1} + 3AA^{-2}(-A^2 - A^{-2}) + A^{-3}(-A^2 - A^{-2})^2 \\
 &= -A^5 - A + 3A - 3A - 3A^{-3} + A + 2A^{-3} + A^{-7} \\
 &= -A^5 - A^{-3} + A^{-7}
 \end{aligned}$$

3.4.2 Das Kaufmann-Polynom

Sei L ein orientiertes Verschlingungsdiagramm. Es gibt positive und negative Kreuzungen (siehe Abbildung 3.4)

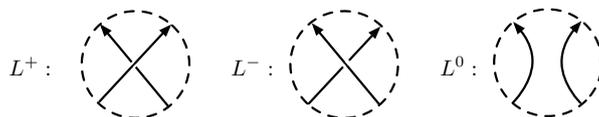


Abbildung 3.4: Positive und negative Kreuzung L^+ und L^- und deren Auflösung

Die Windungszahl $\omega(L)$ von L ist definiert durch:

$$\omega(L) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i,$$

wobei $\varepsilon_i = 1$ wenn die Kreuzung positiv und $\varepsilon_i = -1$ wenn die Kreuzung negativ ist (siehe Abbildung 3.5).

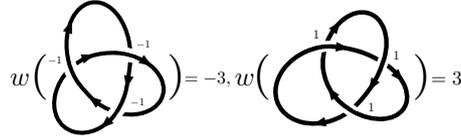


Abbildung 3.5: Die Wendungszahl des rechtshändigen und linkshändigen Kleeblattknotens

Es ist zu beachten, dass wenn die Orientierung umgekehrt wird, dann ändert sich die Windungszahl nicht. Die Windungszahl ist bei den Reidemeister-Bewegungen vom Typ I und II invariant.

Es wird nun ein neues Polynom definiert, das sogenannte Kaufmann-Polynom. Es ist eine polynomiale Invariante von orientierten Verschlingungsdiagrammen, die durch

$$X(L) = (-A)^{-3\omega(L)} \langle |L| \rangle$$

gegeben ist, wobei $\langle |L| \rangle$ das zugehörige nicht orientierte Diagramm ist.

Beispiel 3.4.2. *Kaufmann-Polynom des rechtshändigen Kleeblattknotens.*
Da $\omega(L) = 3$, folgt:

$$X(L) = (-A)^{-9}(-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

Satz 3.4.1. *Das Polynom $X(L)$ ist eine Invariante orientierter Verschlingungen.*

3.4.3 Das Jones-Polynom

Sei L ein orientiertes Verschlingungsdiagramm. Das Jones-Polynom $V(L)$ ergibt sich aus $X(L)$ durch Ersetzen der Variablen A durch $q^{-1/4}$.

Beispiel 3.4.3. *Jones-Polynom des linkshändigen kleeblattknotens.*

$$V(L) = q^1 + q^3 - q^4$$

Beispiel 3.4.4. *Klammer-, Kaufmann- und Jones-Polynom des rechtshändigen Kleeblattknotens.*

$$\begin{aligned}
\langle L \rangle &= A^0 B^3 C^1 + A^1 B^2 C^0 + A^1 B^2 C^0 + A^2 B^1 C^1 \\
&\quad + A^1 B^2 C^0 + A^2 B^1 C^1 + A^2 B^1 C^1 + A^3 B^1 C^2 \\
&= B^3 C + 3AB^2 + 3A^2 BC + A^3 C^2
\end{aligned}$$

für B , A^{-1} und für C , $(-A^2 - A^{-2})$ einsetzen. Dann erhält man:

$$\begin{aligned}
\langle L \rangle &= A^{-3}(-A^2 - A^{-2}) + 3AA^{-2} + 3A^2 A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + A^3(-A^2 - A^{-2})^2 \\
&= -A^{-1} - A^{-5} + 3A^{-1} - 3A^3 - 3A^{-1} + A^7 + 2A^3 + A^{-1} \\
&= -A^{-5} - A^3 + A^7
\end{aligned}$$

$\omega(L) = -3$ und $\langle L \rangle$ in $X(L)$ einsetzen. Dann erhält man:

$$X(L) = (-A)^{-9}(-A^{-5} - A^3 + A^7) = A^4 + A^{12} - A^{16}$$

$$V(L) = q^{-1} + q^{-3} - q^{-4}$$

Der linkshändige Kleeblatt-Knoten ist das Spiegelbild des rechtshändigen Kleeblatt-knotens. Wie schon gezeigt, kann das Jones-Polynom diese beiden Knoten voneinander unterscheiden.

Satz 3.4.2. *Das Jones-Polynom $V(L)$ ist eine Invariante orientierter Verschlingungen und erfüllt die folgenden Relationen:*

- (1) $q^{-1}V(L^+) - qV(L^-) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(L^0)$
- (2) $V(L \cup \bigcirc) = -(q^{-1/2} + q^{1/2})V(L)$
- (3) $V(\bigcirc) = 1$

Beispiel 3.4.5. *Die Anwendung der ersten Relation liefert*

$$q^{-1}V\left(\text{linker Knoten}\right) - qV\left(\text{rechter Knoten}\right) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V\left(\text{Hopf-Verschlingung}\right)$$

Der linke Knoten ist der Unknoten. Er liefert den Wert 1. Der rechte Knoten ist die Hopf-Verschlingung. Die Anwendung der ersten Relation ergibt:

$$\begin{aligned}
q^{-1}V(\text{link}(1,1)) - qV(\text{link}(1,1)) &= (q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{link}(1,1)) \\
\Leftrightarrow -qV(\text{link}(1,1)) &= (q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{link}(1,1)) - q^{-1}V(\text{link}(1,1)) \\
\Leftrightarrow V(\text{link}(1,1)) &= -q^{-1}(q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{link}(1,1)) + q^{-2}V(\text{link}(1,1)) \\
V(\text{link}(1,1)) &\stackrel{(3)}{=} V(\text{link}(1,1)) = 1 \\
V(\text{link}(1,1)) &\stackrel{(2)}{=} -(q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{link}(1,1)) \\
V(\text{link}(1,1)) &= -q^{-1}(q^{1/2} - q^{-1/2}) - q^{-2}(q^{1/2} - q^{-1/2}) \\
\Leftrightarrow V(\text{link}(1,1)) &= -q^{-1/2} + q^{-5/2}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
-qV(\text{link}(2,1)) &= (q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{link}(1,1)) - q^{-1}V(\text{link}(2,1)) \\
\Leftrightarrow V(\text{link}(2,1)) &= -q^{-1}(q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{link}(1,1)) - q^2V(\text{link}(2,1)) \\
V(\text{link}(2,1)) &\stackrel{3}{=} V(\text{link}(2,1)) = 1 \\
V(\text{link}(1,1)) &= -q^{-1/2} + q^{-5/2} \\
V(\text{link}(2,1)) &= -q^{-1}(q^{1/2} - q^{-1/2})(-q^{1/2} - q^{-5/2}) - q^{-2} \\
\Leftrightarrow V(\text{link}(2,1)) &= -q^{-1} + q^{-3} - q^{-4}
\end{aligned}$$

Satz 3.4.3. (Spiegelbild) Sei K ein orientierter Knoten und K^* das Spiegelbild. Das Jones-Polynom des Spiegelbildes resultiert, indem q durch q^{-1} ersetzt wird. Also gilt:

$$V(K^*)(q) = V(K)(q^{-1})$$

Das Jones-Polynom des trivialen Knotens ist 1. Die exakte Berechnung des Jones-Polynoms ist **P-schwer**[5]. Es ist unbekannt, ob das Jones-Polynom den trivialen Knoten erkennt, d.h. ob es einen nicht-trivialen Knoten gibt, dessen Jones-Polynom gleich dem des trivialen Knotens ist[2]. [14]

3.5 Geschlecht eines Knotens

In diesem Abschnitt wird die Anwendung der Flächentheorie auf die Knotentheorie vorgestellt. Der Bezug wird allgemein auf diejenigen Methoden der Knotentheorie angewendet, die auf den Arbeiten mit Flächen basieren. Außerdem wird bewiesen, dass jeder Knoten Rand einer Fläche ist.

3.5.1 Flächen und Homöomorphismen

Drei beliebige nicht kollineare Punkte p_1, p_2, p_3 des dreidimensionalen Raumes bilden die Eckpunkte eines eindeutig bestimmten Dreiecks. Dieses Dreieck ist definiert als die Menge aller Punkte

$$xp - 1 + yp_2 + zp_3, x + y + z = 1, x, y, z \geq 0,$$

wobei die p_i als Vektoren im \mathbb{R}^3 aufgefasst werden. Die Vereinigung endlich vieler solcher Dreiecke heißt *polyedrische Fläche*, falls

1. je zwei Dreiecke entweder disjunkt sind, oder sich in einer gemeinsamen Seite oder in einem gemeinsamen Eckpunkt schneiden.
2. eine Seite höchstens zu zwei Dreiecken gehört.
3. die Vereinigung derjenigen Seiten, die zu genau einem Dreieck gehören, aus einer Anzahl disjunkter einfacher polygonaler Kurven besteht. Diese werden als *Rand* der Fläche bezeichnet.

Orientierung

In der Analysis ist eine Fläche orientierbar, wenn es ein nirgendwo verschwindendes, zur Fläche normales Vektorfeld gibt.

Eine polyedrische Fläche heißt *orientierbar*, wenn die Ränder aller ihrer konstituierenden Dreiecke sich so orientieren lassen, dass immer, wenn zwei Dreiecke an einer Seite zusammentreffen, die beiden induzierten Orientierung dieser Seite entgegengesetzt gerichtet sind.

Eine Fläche lässt sich auf viele verschiedene Arten *triangulieren*, das bedeutet als Vereinigung von Dreiecken beschreiben. Die Definition der Orientierbarkeit hängt von der Wahl dieser Triangulierung ab. Ob eine Fläche orientiert werden kann oder nicht, ist unabhängig von der speziellen Wahl der Triangulierung.

Homöomorphismen

Der Begriff Deformation einer polyedrischen Fläche lässt sich auf ganz ähnliche Weise wie bei den Knoten formulieren. Eine wichtige Erkenntnis ist, dass zwei Flächen internistisch gleich sein können, obwohl sie sich nicht ineinander deformieren lassen. Internistisch bedeutet, dass zwei Flächen ohne Bezugnahmen auf ihre Lage im Raum ununterscheidbar sind. Die Anzahl der Randkomponenten einer Fläche sind zum Beispiel eine internistische Eigenschaft der Fläche. Ob der Rand verknotet ist, lässt sich nur aus einer dreidimensionalen Perspektive feststellen.

Zwei polyedrische Flächen heißen *homöomorph*, falls es nach einer Verfeinerung der beiden Triangulierungen eine Bijektion zwischen ihren Eckpunkten gibt, mit der Eigenschaft, dass drei Eckpunkte, die auf der einen Fläche ein Dreieck begrenzen, auf drei Eckpunkte auf der zweiten Fläche abgebildet werden, die ebenfalls ein Dreieck begrenzen.

3.5.2 Die Klassifikation von Flächen

In Abbildung 3.6 sind einige orientierbare Flächen ohne Rand dargestellt. Jede dieser Flächen enthält eine Zahl, die das Geschlecht zuordnet, welche die Anzahl der Löcher angibt. Die zusammenhängenden orientierten Flächen *ohne Rand* sind genau dann homöomorph, wenn sie dasselbe Geschlecht besitzen. Für die Flächen mit Rand gilt eine verallgemeinerte Klassifikation von Flächen.

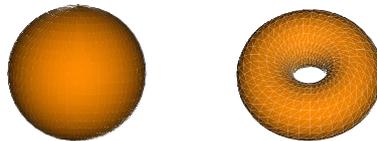


Abbildung 3.6: Flächen ohne Rand

Die Euler-Charakteristik ist eine Invariante einer polyedrischen Fläche. Homöomorphe Flächen besitzen dieselbe Euler-Charakteristik und deren Wert hängt nicht von der Wahl der Triangulierung ab.

Wenn eine polyedrische Fläche S eine Triangulierung hat, die aus F Dreiecken besteht und K Kanten und E Ecken besitzt, lautet die Euler-Charakteristik $\chi(S)$ dieser Fläche wie folgt: $\chi(S) = F - K + E$.

Der Tetraeder besitzt zum Beispiel 4 Seitenflächen, 6 Kanten und 4 Ecken. Die Euler-Charakteristik ergibt sich damit zu $4 - 6 + 4 = 2$.

Das Geschlecht g einer zusammenhängenden orientierbaren Fläche S ist gegeben durch:

$$g(S) = \frac{(2 - \chi(S) - B)}{2},$$

wobei B die Anzahl der Randkomponenten bezeichnet. Die Berechnung des Geschlechts liegt in *PSPACE* [4].

3.5.3 Seifert-Flächen und das Geschlecht eines Knotens

Im Komplement von Knoten spezieller Typen liegen spezielle Typen von Flächen. Es gibt einen Flächentyp, der im Komplement eines jeden Knoten anzutreffen ist.

Eine orientierte Fläche, deren Rand ein vorgegebener Knoten ist, wird eine *Seifert-Fläche* für diesen Knoten genannt. Mit dem Seifert Algorithmus wird zu einem beliebigen Knoten eine orientierte Fläche mit einer Randkomponente konstruiert, die der vorgegebene Knoten ist. Der Algorithmus beginnt mit einer Projektion dieses Knotens und der Wahl einer Orientierung (siehe Abbildung 3.7). Jede Kreuzung dieser Projektion wird eliminiert, indem jeder hineinlaufende Strang mit dem benachbarten hinauslaufenden Strang verbunden wird. Das Ergebnis ist eine Menge von Kreisscheiben in der Ebene, welche *Seifert-Kreise* genannt werden. Jeder Kreis hat als Rand eine in der Ebene liegende Scheibe. Die Kreisscheiben werden im Raum in unterschiedlicher Höhe angeordnet, damit sie sich nicht schneiden. Anschließend werden sie dann miteinander durch verdrehte Bänder verbunden. Dabei ergibt sich eine Fläche, die nur eine Randkomponente hat. Diese *Randkomponente ist der Knoten*. Die so entstandenen Flächen sind orientierbar (siehe Abbildung 3.8).

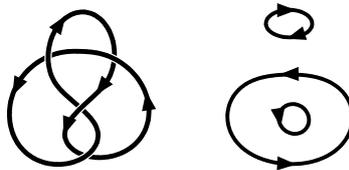


Abbildung 3.7: Eliminieren der Kreuzungen



Abbildung 3.8: Die Kreise liegen in unterschiedlicher Höhe

Mit dem Seiferts Algorithmus für denselben Knoten lassen sich viele Flächen erzeugen. Das *Geschlecht des Knotens K* ist das kleinste bei allen Seifert-Flächen von K auftretenden Geschlechtern. Der Unknoten hat zum Beispiel das Geschlecht null. Wird die Kreisscheibe, die den Unknoten als Rand hat, mit einer zweiten verschlossen, wird eine Sphäre erstellt, deren Geschlecht null ist. Der Unknoten ist der einzige mit dem Geschlecht null

Die Anwendung des Seiferts Algorithmus auf eine alternierende Projektion einer alternierenden Verschlingung ergibt eine Seifert-Fläche minimalen Geschlechts. [1][3][7]

4 Polynome

Nachdem Jones das Jones-Polynom entdeckt hatte, begannen viele Mathematiker nach einem Polynom mit zwei Variablen zu suchen. Als erstes und bisher neuestes Knotenpolynom war das *Homfly-Polynom*. Das Ziel dieses Abschnittes ist es, den neuesten Stand der Forschung auf dem Gebiet der Knotenpolynome darzulegen.

4.1 Polynome alternierender Knoten

Ein alternierender Knoten wird als ein Knoten definiert, bei dem während des Umlaufs der Knotenprojektion in einer fest gewählten Richtung die aufeinanderfolgenden Kreuzungen abwechselnd oberhalb und unterhalb passiert. Eine solche Projektion wird als eine alternierende Knotenprojektion bezeichnet. Eine alternierende Knotenprojektion heißt „reduziert“, wenn es darin keine unnötigen Kreuzungen gibt. Eine nichtreduzierte alternierende Knotenprojektion kann immer zu einer reduzierten vereinfacht werden. Ist sie jedoch reduziert, so gibt es keinen Weg, die Zahl der Kreuzungen weiter zu verringern. Diese Tatsache war der Hintergrund für zwei im letzten Jahrhundert aufgestellte Vermutungen:

Vermutung 1: Zwei reduzierte alternierende Knotenprojektionen desselben Knotens haben dieselbe Anzahl von Kreuzungen.

Vermutung 2: Die Anzahl der Kreuzungen einer reduzierten alternierenden Knotenprojektion ist gleich dem Minimum der Anzahl aller in irgendeiner Knotenprojektion auftretenden Kreuzungen.

Die Richtigkeit beider diesen Vermutungen wurde im Jahr 1986 von Louis Kauffman, Kuno Murasugi und Morwen Thistlethwaite bewiesen. [1]

Die „Höhe“ eines Polynoms sei die Differenz zwischen dem kleinsten und dem größten darin vorkommenden Exponenten. So ist beispielsweise die Höhe des folgenden Polynoms:

$$A^3 - 2A^2 + 1 - A^1 - 7A^{-2}$$

gleich $3 - (-2) = 5$.

Obwohl die Höhe des Klammer-Polynoms selbst keine Kontinenzvariante ist, ist doch seine Höhe eine solche. Es wurde gezeigt, dass die Reidemeister-Bewegungen der Typen II und III das Klammer-Polynom nicht ändern. Somit ist die Höhe des Polynoms ebenso unverändert. Die Reidemeister-Bewegungen vom Typ I werden in das Klammer-Polynom verändert und durch die Reidemeister-Bewegungen vom Typ I mit dem gesamten Polynom mit A^3 oder mit A^{-3} multipliziert. Die Multiplikation mit A^3 erhöht den Exponenten des höchsten Potenz ebenso wie den der niedrigsten um drei. Folglich ist die Differenz der beiden, die die Höhe angibt, unverändert. Ähnlich ist es auch bei der Multiplikation mit

A^{-3} . Somit ist die Höhe des Klammer-Polynoms bei allen drei Reidemeister-Bewegungen invariant und folglich ist dies eine *Knoteninvariante*. Im nächsten Schritt wird folgender Satz bewiesen:

Satz 4.1.1. *Wenn L eine reduzierte alternierende Projektion mit n Kreuzungen ist, so gilt für die Höhe $\langle L \rangle = 4n$.*

Die Höhe des Klammer-Polynom von K hängt nicht von der verwendeten Projektion des Knotens ab. Daher wird die reduzierte alternierende Projektion verwendet, die gemäß der in der Formulierung des Hilfssatzes gemachten Voraussetzung gegeben ist. Zuerst wird festgestellt, welche Potenz im Klammer-Polynom die höchste ist. Jeder Zustand S liefert einen Beitrag der Gestalt $A^{\alpha(s)}A^{-\beta(s)}(-A^2 - A^{-2})^{|s|-1}$. Wird dieser Ausdruck ausmultipliziert, so ergibt sich als höchste in diesem Term vorkommende Potenz von A das Glied $A^{\alpha(s)}A^{-\beta(s)}(A^2)^{|s|-1}$. Unter allen auftretenden Zustände wird derjenigen gefunden, für den die Zahl $\alpha(s) - \beta(s) + 2(|s| - 1)$ am größten ist. Dieses Maximum ist dann der Exponent der höchsten im Klammer-Polynom auftretenden Potenz. Damit $\alpha(s) - \beta(s) + 2(|s| - 1)$ so groß wie möglich wird, wird ein Zustand eingenommen, für den die Zahlen $\alpha(s)$ und $|s|$ möglichst groß sind und die Zahl $\beta(s)$ möglichst klein ist. Damit $|s|$ groß wird, muss es in der zu s gehörenden Verschlingung möglichst viele disjunkte Kreise geben. Um $\alpha(s)$ möglichst groß und $\beta(s)$ möglichst klein zu bekommen, muss es viele A -Aufspaltungen und wenige B -Aufspaltungen geben. Es werden nur A -Aufspaltungen gebildet(siehe Abbildung 4.1).

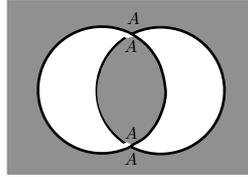


Abbildung 4.1: A-Gebiete werden grau schattiert und B-Gebiete weiß

Da n Kreuzungen existieren, gilt dann $\alpha(s) = n$ und $\beta(s) = 0$. Sei W die Anzahl der Kreise ist dann die höchste, in diesem speziellen Zustand auftretende Potenz von A gleich $\alpha(s) - \beta(s) + 2(|s| - 1) = n + 2(W - 1)$. Hier wird gezeigt, dass sich die höchste Potenz beim Übergang von einem Zustand s_1 zu einem anderen s_2 , der durch Umwandlung einer A - in eine B -Aufspaltung erfolgt ist, nicht vergrößert werden kann. Die höchste Potenz in dem s_1 entsprechenden Term ist $\alpha(s_1) - \beta(s_1) + 2(|s_1| - 1)$. Dann ergibt sich für die höchste Potenz in dem s_2 entsprechen Term der Wert $\alpha(s_1) - \beta(s + 1) + 2(|s_2| - 1)$, dabei wurde die Anzahl der A -Aufspaltungen um eins verringert und die der B -Aufspaltungen um eins erhöht. s_2 unterscheidet sich von s_1 nur in einer Aufspaltung. Diese erhöht entweder die Anzahl der geschlossenen Kurven um eins oder verringert sie um den gleichen Wert. Folglich gilt $|s_2| = |s_1| \pm 1$. Der Exponent der höchsten Potenz der s_2 entsprechende Term ist dann $\alpha(s_1) - \beta(s - 1) + 2((|s_1| \pm 1) - 1)$. Somit hat die höchste in dem Klammer-Polynom von K vorkommende Potenz den Exponenten $n + 2(W - 1)$. Durch ein ähnliches Argument ist der Exponent der niedrigsten Potenz $-n - 2(D - 1)$, wobei D die Anzahl

der dunklen Gebiete ist. Diese kleinste Potenz tritt in dem Term auf, der dem des B-Zustandes entspricht. Daher ist die Höhe $(\langle L \rangle) = \text{höchste Potenz} - \text{kleinste Potenz} = n + 2(W - 1) - (-n - 2(D - 1)) = 2n + 2(W + D - 2)$. $W + D$ ist die Gesamtzahl aller Gebiete der Projektion und diese ist gleich $n + 2$. Folglich ist die Höhe $(\langle L \rangle) = 2n + 2n = 4n$.

Die *Tait-Flyping-Vermutung* besagt, dass zwei reduzierte alternierende Projektionen desselben Knotens genau dann äquivalent sind, wenn sie durch eine Folge sogenannter *Flyping-Bewegungen*, ineinander überführt werden können. Eine *Flyping-Bewegung* ist die Drehung eines Gewirrs um 180 Grad. Wenn diese wahr ist, ermöglicht die *Tait-Flyping-Vermutung*, alle möglichen reduzierten alternierenden Projektionen eines gegebenen alternierenden Knotens zu zeichnen. Dabei ergibt sich eine höchstens endliche Anzahl von Projektionen. Anders als beim Übergang von einer Knotenprojektion zur anderen mittels der Reidemeister-Bewegungen ermöglichen die *Flyping-Bewegungen* den Übergang von einer reduzierten alternierenden Projektion zu einer anderen reduzierten alternierenden Projektion desselben Knotens, *ohne dabei die Anzahl der Kreuzungen zu vergrößern*.

4.2 Das Alexander-Polynom

Das Alexander-Polynom ist das erste Knotenpolynom. Es ist eine polynomiale Invariante orientierter Verschlingungen. Im Jahr 1969 zeigte John Conway, dass sich das Alexander-Polynom Δ mit Hilfe von zwei Regeln berechnen lässt:

$$\text{Regel 1: } \Delta(\bigcirc) = 1$$

Sind L_+ , L_- , L_0 drei Verschlingungen, die fast überall identisch sind. Sie unterscheiden sich nur in dieser einen Kreuzung. Also gilt:

$$\text{Regel 2: } \Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0) = 0$$

Im Gegensatz zum Jones-Polynom sind Beispiele nichttrivialer Knoten bekannt, deren Alexander-Polynom gleich eins ist. Einer derer Nachteile besteht darin, dass mit ihm nicht alle Knoten von trivialen unterschieden werden können. Jede Projektion lässt sich durch Abändern einiger Kreuzungen in die Projektion einer trivialen Verschlingung umwandeln. Es wird bei einer Projektion eine der Kreuzungen ausgewählt, die geändert werden muss und für L_+ oder L_- in der Flechtrelation als Ausgangsverschlingung eingesetzt. (Ihr Polynom kann durch das Polynom einer Verschlingung ausgedrückt werden, deren Projektion eine Kreuzung weniger besitzt, und durch das Polynom einer Verschlingung, deren Projektion eine Kreuzung näher an der trivialen Projektion ist.) Wird dieser Vorgang wiederholt, so ergibt sich ein baumartiges Schema, das *auflösender Baum* genannt wird. An der Spitze steht die ursprüngliche und an den Blättern die triviale Verschlingung. Die *Tiefe einer Verschlingung* wird als minimale Tiefe aller ihrer auflösenden Bäume definiert. Die Tiefe ist ein Maß für die Kompliziertheit der Rechnungen zur Bestimmung des Alexander-Polynoms.

4.3 Das Homfly-Polynom

Das Homfly-Polynom ist eine Verallgemeinerung des Jones- als auch des Alexander-Polynoms, für das, das Symbol $P(L)$ verwendet wird.

$$\text{Regel 1: } P(\bigcirc) = 1$$

Sind L_+, L_-, L_0 drei Verschlingungen, die fast überall identisch sind. Sie unterscheiden sich nur in dieser einen Kreuzung. Also gilt:

$$\text{Regel 2: } lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$$

Es gibt drei Verschlingungen, die mit Ausnahme der einzigen vorhandenen Kreuzung übereinstimmen und somit ein Tripel L_+, L_-, L_0 bilden. Also gilt $lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$ Sowohl L_+ als auch L_- sind verdrehte Bilder des Umknotens. Somit gilt $P(L_+) = P(L_-) = 1$ und folglich $mP(L_0) = -(l + l^{-1})$. folgendes ergibt sich $P(L_0) = -m^{-1}(l + l^{-1})$

Es sei $L_1 \cup L_2$ die unzusammenhängende Summe der beiden Verschlingungen L_1 und L_2 . Dann gilt $P(L_1) \cup P(L_2) = -(l + l^{-1})m^{-1}P(L_1)P(L_2)$.

Das Polynom der Zusammensetzung zweier Verschlingungen ist das Produkt der Polynoms der Faktorverschlingungen. Das Polynom der Zusammensetzung zweier Kleeblattschlingen ist gleich $(-2l^2 - l^4 + l^2m^2)^2$, das bedeutet das Quadrat des Polynoms einer einzelnen Kleeblattschlinge.

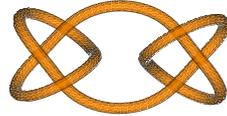


Abbildung 4.2: Der Zusammengesetzte Knoten zweier Kleeblattknotens

Es ist nicht von Bedeutung, welche Komponente der ersten Verschlingung mit welcher Komponente der zweiten verbunden werden sollen. Alle diese verschiedene Verschlingungen haben dasselbe Homfly-Polynom.

Die zusammengesetzte Verschlingung $P(L_1 \# L_2)$ besitzt eine Projektion. Wird die Projektion von L_2 in zwei verschiedene Richtungen gedreht, entstehen zwei Verschlingungen L_+ und L_- . Die unzusammenhängende Summe von L_1 und L_2 ist L_0 .

Die zweite Regel für das Berechnen des Polynom $P(L)$ ergibt:

$$lP(L_1 \# L_2) + l^{-1}P(L_1 \# L_2) + mP(L_1 \cup L_2) = 0$$

Es gilt folgendes, jedoch wird es nicht tiefer in dieser Arbeit behandelt:

$$P(L_1 \cup L_2) = -(l + l^{-1})m^{-1}P(L_1)P(L_2)$$

durch das Ersetzen von $P(L_1 \cup L_2)$, ergibt sich:

$$lP(L_1 \# L_2) + l^{-1}P(L_1 \# L_2) + m(-l + l^{-1})m^{-1}P(L_1)P(L_2) = 0$$

Dann besagt diese Gleichung, dass sich die Polynoms der Noten genau so wie die ganzen Zahlen bei der Multiplikation verhalten. Das Polynom eines zusammengesetzten Knotens zerfällt in das Produkt des Polynoms seiner Faktorknoten.

Durch die Substitutionen l durch iq^{-1} und m durch $q^{-1/2} - q^{1/2}$ wird das Homfly-Polynom in das Jones-Polynom überführt. Wobei i die imaginäre Einheit ist. Das Homfly-Polynom der Kleeblattschlinge K ist gleich $P(K) = -2l^2 - l^4 + l^2m^2$. Die erwähnte Substitutionen für l und m ergeben dann

$$\begin{aligned} V(K) &= -2(iq^{-1})^2 - (iq^{-1})^4 + (iq^{-1})^2(q^{-1/2} - q^{1/2})^2 \\ &= 2q^{-2} - q^{-4} - q^{-2}(q^{-1} - 2 + q) \\ &= -q^{-4} - q^{-3} - q^{-1} \end{aligned}$$

Für das Unterscheiden von Knoten ist das Homfly-Polynom besser als Jones- und das Alexander-Polynom, denn diese beiden sind nur Spezialfälle des Homfly-Polynoms. Aber auch dieses neueste Knotenpolynom ist keine vollständige Knoteninvariante, denn die Knoten mit gleichem Homfly-Polynom sind nicht unbedingt gleich.

4.4 Amphichiralität

Ein Knoten K ist amphichiral, wenn er zu seinem Spiegelbild K^* äquivalent ist. Das Klammer-Polynom von K^* ist gleich dem Klammer-Polynom von K , wenn die Variable A durch A^{-1} ersetzt wird. Das gleiche gilt auch für das Kaufmann-Polynom. Ist K also amphichiral, gilt

$$X_K(A) = X_{K^*}(A^{-1}) = X_K(A^{-1})$$

wobei $X_K(A)$ das Kaufmann-Polynom in der Variablen A ist. Folglich muss das Polynom eines amphichiralen Knotens *Palindromartig* sein, das bedeutet, dass, in umgekehrter Richtung gelesen, muss die Folge aller Koeffizienten dieselbe sein. In Abschnitt 1.3 wurde mit Hilfe von den Reidemeister-Bewegungen gezeigt, dass Achterknoten amphichiral sind. Folglich muss sein Polynom palindromartig sein. Es lautet $A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}$. Wird in sein Klammer-Polynom überall A durch A^{-1} ersetzt, ergibt sich dasselbe Polynom. Das Polynom der Kleeblattschlinge $A^4 + A^{12} - A^{16}$ ist nicht palindromartig. Wird A durch A^{-1} ersetzt, ergibt sich $A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$, ein ganz anderes Polynom. Damit ist bewiesen, dass der Kleeblattknoten nicht amphichiral ist.

Die folgenden zwei Gleichungen beweisen die alternierende Knoten, die in einer reduzierten alternierenden Projektion gegeben sind:

$$\max \deg(L) = n + 2(W - 1)$$

und

$$\min \deg(L) = -n - 2(D - 1)$$

Nach der Definition des Kaufmann-Polynoms

$$X(L) = (A)^{-3\omega(L)} \langle |L| \rangle$$

gelten folgende Gleichungen.

$$\max \deg(L) = n + 2(W - 1) - 3\omega(L)$$

und

$$\min \deg(L) = -n - 2(D - 1) - 3\omega(L)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \max \deg(L) &= -\min \deg(L) \\ n + 2(W - 1) - 3\omega(L) &= -n - 2(D - 1) - 3\omega(L) \\ \iff 3\omega(L) &= W - D \end{aligned}$$

Damit ein alternierender Knoten amphichiral ist, muss die Differenz der Anzahl der weißen und dunklen Gebiete gleich dem dreifachen der Windungszahl $\omega(L)$ sein. Diese Gleichung muss in jeder reduzierten alternierenden Knotenprojektion gelten.

5 Knotentypen

In diesem Kapitel werden die Knotentypen , wie Torusknoten, Satellitenknoten und Zöpfe, betrachtet.

5.1 Torusknoten

Torusknoten sind Knoten, deren Stränge auf einem unverknoteten Torus liegen. Ein Torus als das topologische Produkt zweier Kreise hat die Koordinaten $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$, wobei 2π mit 0 identifiziert ist.

$$(\phi, \psi) \longrightarrow ((R + r\cos\psi)\cos\phi, (R + r\cos\psi)\sin\phi, r\sin\psi),$$

wobei r der innere Kreis des Torus und R der äußere Kreis des Torus ist.

Eine Kurve, die den Torus einmal auf dem kürzeren Weg umrundet, wird Meridian ψ und eine, die es auf einem längeren Weg umrundet, eine longitudinale ϕ Kurve genannt. Die Kleeblattschlinge windet sich meridional dreimal und longitudinal zweimal um den Torus, daher wird sie $(3, 2)$ -Torusknoten genannt. Für jeden Torusknoten gibt es zwei ganze Zahlen p und q . Daraus folgt: p, q -Torusknoten, Die beiden ganzen Zahlen p und q sind immer zueinander teilerfremd.

Die Torusknoten haben die gleichen Eigenschaften wie die alternierenden Knoten. Die Anwendung des Seifert-Algorithmus auf eine Knotenprojektion ergibt eine Seifert-Fläche von minimalem Geschlecht. Ein Knoten K ist n -einbettbar, wenn K ohne Kreuzungspunkte in eine unverknotet eingebettete Fläche von Geschlecht n , aber in keine von kleinerem Geschlecht eingebettet ist. Der Achterknoten ist beispielsweise eine zweieinbettbare Knoten.[2]

Das minimale Geschlecht einer Seifertfläche eines Torusknotens mit $p, q > 0$ ist:

$$g = 1/2(p - 1)(q - 1).$$

Das Alexander-Polynom eines Torusknotens ist:

$$\frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}.$$

Das Jones-Polynom eines (rechtshändigen) Torusknotens ist:

$$t^{(p-1)(q-1)/2} \frac{1 - t^{p+1} - t^{q+1} + t^{p+q}}{1 - t^2}.$$

5.2 Satellitenknoten

Es sei K_1 ein innerhalb eines unterkneteten Vollkorns liegender Knoten. Wenn der Torus verknotet wird, dann hat er die Gestalt eines zweiten Knotens K_2 . Dabei wird aus dem in dem ursprünglichen Torus liegenden Knoten K_1 ein neuer, der in dem neuen verknoteten Torus liegt. Dies wird mit K_3 bezeichnet. K_3 wird als Satellitenknoten und K_2 als begleitender Knoten genannt. Für diesen wird immer vorausgesetzt, dass der nichttrivial ist, weil anderenfalls er ein sich ergebener Satellitenknoten K_1 wird. Außerdem wird vorausgesetzt, dass K_1 jede Meridianscheibe des Volltorus schneidet und dass es keine isotope Verformung von K_1 gibt, die zu einer solchen Kreisscheibe disjunkt ist.[1]

5.3 Zöpfe

Sei n eine natürliche Zahl. Im Raum \mathbb{R}^3 werden die Punkte $A_i = (i, 0, 0)$ und $B_i = (i, 0, 1)$, für $i = 1, \dots, n$ betrachtet. Ein Polygonzug, der ein A_i mit einem B_j verbindet heißt aufsteigend, falls eine Bewegung auf dem Polygonzug bzgl. der z-Koordinate (streng) monoton wachsend verläuft. Ein solcher Polygonzug heißt auch Strang.

Ein n -strängiger Zopf besteht aus n sich nicht-schneidenden aufsteigenden Polygonzügen, die die Punkte A_1, \dots, A_n mit den Punkten B_1, \dots, B_n (in irgendeiner Ordnung) verbinden.[6]

Eine Menge mit einer Verknüpfung und folgenden Eigenschaften heißt Gruppe.

1. Ist die Verknüpfung assoziativ?

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

2. Gibt es ein neutrales Element?

$$a * 1 = a \text{ und } 1 * a = a$$

3. Existiert zu jedem Gruppenelement ein inverses Element?

$$a * a^{-1} = 1 \text{ und } a^{-1} * a = 1$$

Auf der Menge der n -strängigen Zöpfe ist eine Gruppenstruktur vorhanden. Daraus folgt:

1. Die Verknüpfung von Zöpfen ist assoziativ:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

2. Es gibt ein neutrales Element 1, nämlich den trivialen Zopf:

$$a * 1 = 1 * a = a$$

3. Zu jedem Zopf a gibt es einen inversen Zopf a^{-1} , nämlich sein Spiegelbild:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$$

Satz 5.3.1. (Emil Artin) Die Zöpfe auf n Strängen und ihre Verknüpfung bilden eine Gruppe.

Die Gruppe der n -strängigen Zöpfe wird mit B_n bezeichnet. Sie heißt Zopfgruppe in n -Strängen. Wie folgt werden die Elemente $b_1, b_2, \dots, b_n \in B_n$ definiert:

1. Die Projektionen der Stränge sind nicht tangential zueinander.
2. Kein Punkt der xz -Ebene ist eine Projektion dreier oder mehrerer Punkte des Zopfes.
3. Die Kreuzungspunkte liegen alle auf unterschiedlichen Niveaus (über der xy -Ebene).

Jedes Element $b \in B_n$ kann als ein Wort in den Buchstaben b_1, \dots, b_{n-1} sowie deren Inversen $b_1^{-1}, \dots, b_{n-1}^{-1}$ geschrieben werden. Zum Beispiel wäre $b = b_1 b_2^{-1} b_3^2 b_3^{-1} b_1$ ein solches Wort. Eine solche Darstellung ist nicht eindeutig, denn wegen $b_3 b_3^{-1} = 1$ kann obiges Wort reduziert werden auf $b = b_1 b_2^{-1} b_3 b_1$.

Zu jedem Zopf $b \in B_n$ wird der Abschluss $\beta(b) = \beta_n(b)$ der Verschlingung L definiert. Sei \mathcal{L} die Menge aller Äquivalenzklassen von Verschlingungen. Es ist $\beta = \beta_n : B_n \rightarrow \mathcal{L}$. Jedem Zopf $b \in B_n$ kann eine Permutation $\sigma(b) \in S_n$ zugehörnet werden, die die Endpunkte $1, \dots, n$ durch seine Stränge permutiert. Dies liefert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\sigma : B_n \rightarrow S_n$, der schon durch die Zuordnung $b_i \mapsto \tau(i, i+1)$ eindeutig beschrieben ist.

Sei $b \in B_n$. Dann ist $\beta(b)$ ein Knoten genau dann, wenn $\sigma(b) \in S_n$ ein Zykel der Länge n ist.

Satz 5.3.2. (Alexander) Sei L eine Verschlingung. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $b \in B_n$, so dass L äquivalent ist zu $\beta(b)$.

Sei $\coprod_{n \geq 1} B_n$ die disjunkte Vereinigung von B_n . Dann besagt der Satz von Alexander, dass folgende Abbildung:

$$\beta : \coprod_{n \geq 1} B_n \rightarrow \mathcal{L}$$

surjektiv ist.

Satz 5.3.3. (Markov) Die Abschlüsse zweier Zöpfe b und b^* sind äquivalente orientierte Verschlingungen genau dann, wenn b durch eine endliche Folge von Markov-Bewegungen in b^* überführt werden kann.

Erste Markov-Bewegung: $b \leftrightarrow aba^{-1}$, wobei $a, b \in B_n$

Zweite Markov-Bewegung: $b \leftrightarrow bb_n^{\pm}$, wobei $b \in B_n \subset B_{n+1}$

6 Topologie

Zuvor wurden die Knoten im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 betrachtet. \mathbb{R}^2 definiert die Ebene und \mathbb{R}^1 die Zahlengerade. Im folgenden Kapitel wird \mathbb{R}^4 dargestellt.

6.1 Komplementärraum von Knoten und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten

Eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit hat die Eigenschaft, dass es um jeden ihrer Punkte eine Kugel gibt, die ganz in der Mannigfaltigkeit enthalten ist.

Das einfachste Beispiel einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ist der Raum \mathbb{R}^3 . Wird darin irgendein Punkt ausgewählt, so gibt es eine ihn enthaltene Kugel, die auch im \mathbb{R}^3 enthalten ist.

Das Komplement des Knotens ist ebenfalls ein Beispiel für eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Der Komplementärraum eines Knotens oder das Knotenkomplement wird als der gesamte Raum minus der Knoten definiert ($\mathbb{R}^3 - K$). Wird ein Punkt ausgewählt, der weit entfernt vom Knoten liegt, gibt es immer eine im Knotenkomplement enthaltene, ihn umgebende Kugel. Auch wenn sich der im Knotenkomplement ausgewählte Punkt sehr nahe am Knoten befindet, gibt es eine sehr kleine Kugel, die den Punkt enthält und mit dem Knoten keine gemeinsamen Punkte besitzt.

Die zweidimensionale Sphäre besteht aus zwei gekrümmten Kreisscheiben, die an ihren Rändern verbunden sind. Da das Analogon einer zweidimensionalen Kreisscheibe, das eine Dimension mehr besitzt, eine Vollkugel ist, wird eine dreidimensionale Sphäre durch zwei Vollkugel beschrieben. Im dreidimensionalen Raum kann nicht die Operation des Verkleben der ersten mit der zweiten Sphäre ausgeführt werden, da der erste Rand nicht in den zweiten deformiert werden kann.

Sicherlich ist jeder Punkt, der sich im Inneren einer der beiden Kugeln befindet, von einer kleineren Kugel umgeben, die sich ganz in der größeren befindet. Ebenso ist aber auch ein Punkt x auf einer der brandenden Sphären von einer Kugel B umgeben, die in der Mannigfaltigkeit enthalten ist. Dabei liegt eine Hälfte von B in der ersten und die andere Hälfte in der zweiten Kugel. Diese beiden Halbkugel sind zur Vollkugel B verbunden, in der x liegt.

Um eine zweite Beschreibung der dreidimensionalen Sphäre zu geben, wird zu den Punkten des \mathbb{R}^3 noch ein besonderer Punkt hinzugenommen, der im unendlich entfernten Raum liegt und daher nicht zu \mathbb{R}^3 gehört. Dieser Punkt wird mit dem Symbol ∞ bezeichnet. Die dreidimensionale Sphäre als Punktmenge ist gleich $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$. In der zweiten Beschreibung sind wieder die beiden Kugeln zu erkennen. Die Punkte, die vom

Ursprung des \mathbb{R}^3 einen Abstand kleiner oder gleich eins haben, bilden die erste Kugel. Die Punkte mit einem Abstand, der mindestens gleich eins zusammen mit dem Punkt ∞ , entspricht der zweiten Kugel.

Für einen Punkt, der innerhalb der Kugel vom Radius eins ist, ist der Abstand zum Ursprung der übliche. Hat ein Punkt vom Ursprung einen Abstand d , der größer oder gleich eins ist, so wird sein Abstand vom Punkt ∞ als $1/d$ definiert. Je weiter nach außen ein Punkt in der gewöhnlichen Abstandsmessung liegt, um so näher liegt er bei ∞ . Dadurch wird ∞ zum Zentrum der zweiten Sphäre, die aus allen Punkten außerhalb der Sphäre vom Radius eins besteht.

Die letzte Beschreibung von S^3 macht klar, dass S^3 und \mathbb{R}^3 sich sehr ähneln und nur in dem einen Punkt ∞ voneinander unterscheiden. Der Vorteil, den die Sphäre S^3 gegenüber \mathbb{R}^3 hat, besteht in der Kompaktheit.

Eine Fläche ist kompakt, wenn sie sich durch eine endliche Anzahl von Dreiecken triangulieren lässt. Eine Triangulierung einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit bedeutet, dass die Dreiecke durch die Tetraeder, die eine Dimension mehr haben, ersetzt werden, wobei je zwei Tetraeder entweder disjunkt sind oder nur eine Seite, eine Kante oder eine Ecke gemeinsam haben.

Wenn zwei Kugeln zur Herstellung einer Sphäre S^3 an ihren brandenden Sphären miteinander verbunden sind, werden Ecken mit Ecken, Kanten mit Kanten und Seiten mit Seiten gebildet. Es wird davon ausgegangen, dass die Tetraeder aus Gummi bestehen und deformiert werden können. Die Triangulierung von \mathbb{R}^3 hat unendlich viele Tetraeder, während die von S^3 aus endlich vielen besteht. Die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten werden \mathbb{R}^3 vorgezogen, denn es ist immer leichter, mit endlichen, statt mit unendlichen Mengen zu operieren. Dazu ist nur der Punkt ∞ hinzuzunehmen, dann liegt der Knoten in einem kompakten Raum. Sobald der Knoten aus der Sphäre herausgenommen wird, ist die verbleibende dreidimensionale Mannigfaltigkeit $S^3 - K$ nicht mehr kompakt. Es gibt keine Möglichkeit, den Komplementärraum mit endlich vielen Tetraedern zu triangulieren. Es ist aber möglich die mit unendlich vielen Tetraedern zu triangulieren, die immer kleiner werden müssen, wenn sie den Raum in der Nachbarschaft des Knotens ganz ausfüllen sollen.

Um das Aussehen des Komplementärraumes eines Knotens in S^3 zu zeigen, wird der Knoten an einer Stelle zerschnitten und im Raum so angeordnet, dass die beiden Schnittenden in zwei entgegengesetzten Richtungen nach ∞ gehen. Auf diese Weise wird ∞ ein Bestandteil des Knotens. Wird der Knoten aus S^3 herausgenommen, wird auch der Punkt ∞ entfernt.

Eine andere dreidimensionale Mannigfaltigkeit entsteht durch das Verbinden zweier Tori, statt zweier Kugeln mit ihren Randflächen. Verschiedene Arten des Verbindens ergeben verschiedene dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. Alle Mannigfaltigkeiten, die auf diesem Weg erzeugt werden, sind kompakt.

Eine erste Möglichkeit die beiden Randflächen zu verbinden, besteht darin, die Meridiankurven auf dem ersten Torusrand mit der Longitude auf dem zweiten zu verheften. Der erste Torus wird entlang zweier Meridianscheiben zerschnitten. Eines der beiden Stücke wird so in den zweiten Torus gegeben, sodass seine Meridiane mit Longitude der Randfläche des zweiten Torus verhaftet werden. Das sich ergebende Gebilde ist eine Ku-

gel. Ebenso hat das übriggebliebene Stück des ersten Torus den typologischen Typ einer Kugel. Folglich ist die Mannigfaltigkeit, die sich durch Verbinden des zweiten Stücks ergibt, dieselbe, die durch Verbinden der beiden Kugeln mit ihren Rändern entsteht.

7 Die offene Probleme

1. Knoten-Äquivalenzproblem

Eingabe: Knoten K_1, K_2

Frage: Gilt $K_1 \approx K_2$?

Entscheidbarkeit: offen

2. Entknotungsproblem

Eingabe: Knoten K

Frage: Gilt $K \approx \text{Kreis}$?

Entscheidbarkeit: Ja

Offen ist, ob das Entknotungsproblem in P liegt. Bekannt ist NP-Mitgliedschaft.[4]

3. Eingabe: K_1, K_2

Frage: $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$, wobei c die Selbstschnittzahl eines Knotens ist.

Entscheidbarkeit: offen

4. Eingabe: Knoten $\langle K_1 \rangle$

Frage: Ist das Jones Polynom von $\langle K_1 \rangle$ verschieden vom Unknoten?

Entscheidbarkeit: offen

8 Zusammenfassung

Die bedeutendsten Knoteninvarianten sind die Knotenpolynome. Dabei wird jedem Knoten ein Polynom zugeordnet, das sich aus Knotenprojektionen errechnet, wobei sich aus je zwei Knotendiagrammen äquivalenter Knoten dasselbe Polynom ergibt. Die Knotenpolynome sind unter den Reidemeister-Bewegungen invariant. Das Alexander-Polynom ist die erste und über viele Jahrzehnte die einzige Invariante dieser Kategorie gewesen, die bereits viele Knoten mit wenigen Kreuzungen unterscheiden konnte. Weitere Knoten werden über das Jones-Polynom unterschieden. Die Berechnung der Jones-Polynom ist ***P-Hard***[5]. Das Homfly-Polynom [10] ist die bisher stärkste polynomiale Knoteninvariante, die durch das Jones-Polynom entdeckt wurde. Keine der bisher bekannten Knotenpolynome ist eine vollständige Invariante. Vollständig bedeutet, dass in allen Fällen je zwei verschiedene Knoten voneinander unterschieden werden können. Die Suche nach besseren polynomialen Invarianten wird fortgesetzt.

Das Problem zwei Knoten mit Hilfe von Reidemeister-Bewegungen zu unterscheiden ist ***semi-entscheidbar***, da es für die Anzahl der Bewegungen, die erforderlich sind, um von einer Projektion zur anderen zu gelangen, keine obere Schranke gibt.

Es gibt keinen polynomiellen Algorithmus, mit dem die Entknotbarkeit eines unverknoteten Knotens überprüft werden kann. Es ist jedoch schon seit Ende der 90er Jahre bekannt, dass das Unverknotetsein in ***NP*** liegt. Eine Verallgemeinerung des Unverknotetseins ist das Geschlecht der Knoten. Ein Knoten ist unverknotet genau dann wenn, seine Seifertfläche das Geschlecht null hat. Die Berechnung des Geschlechts von den Seifertflächen erfolgt in der Komplexitätsklasse ***PSPACE***[4]. Die andere Verallgemeinerung des Unverknotetseins heißt Splittability von Verschlingungen, deren Entscheidbarkeit von Haken 1961 bewiesen und im Jahr 2008 gezeigt wurde, dass das Splittingproblem in ***NP***[4] liegt.

Im letzten Kapitel wird die dreidimensionale Mannigfaltigkeit und der Komplementärraum eines Knotens betrachtet. Ein Knoten K in der 3-Sphäre ist genau dann trivial, wenn das Komplement $S^3 - K$ homöomorph zum Torus ist.

Literaturverzeichnis

- [1] Colin C.Adams. *Das Knotenbuch*. 1995.
- [2] Prof. Dr. Michael Eisermann. Knoten und zöpfe. Institut für Geometrie und Topologie Universität Stuttgart, 2011.
- [3] Moritz Epple. *Die Entstehung der Knotentheorie*. 1999.
- [4] Jeffrey C. Lagarias Joel Hass and Nicholas Pippenger. The computational complexity of knot and link problems. 2008.
- [5] Greg Kuperberg. How hard is it to approximate the jones polynomial? 2014.
- [6] Dirk Kussin. Vorlesungsskript knoten. Universität Paderborn, 2005.
- [7] Charles Livingston. *Knotentheorie für Einsteiger*. 1995.
- [8] ANDREAS LOOS. Ist der knoten geplatzt? <http://www.zeit.de/2012/47/Knoten-Theorie-Mathematik>.
- [9] Otto Neumaier Meike Akveld. Die mathematische knotentheorie und ihre aktuellen anwendungen. 2014.
- [10] Kunio Murasugi. *Knot Theory and Its Applications*. 1996.
- [11] Kurt Reidemeister. Knotentheorie. 1932.
- [12] Holger Spakowski. Completeness for parallel access to np and counting class separations.
- [13] Prof. Dr. Heribert Vollmer. Grundlagen der theoretischen informatik. Fakultät für Elektrotechnik und Informatik Universität Hannover, 2007.
- [14] Johannes Warnecke. Einführung in die knotentheorie für den (erweiterten) mathematikunterricht. 2007.