Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
Institut für Theoretische Informatik

Ehrenfeucht Spiele und die Komplexität logischer Theorien

Bachelorarbeit

Laura Reinhardt
Matrikelnr. 10014840

Hannover, den 17.09.2022

Erstprüfer:	Prof. Dr. rer. nat. Heribert Vollmer
Zweitprüfer:	PD Dr. rer. nat. habil. Arne Meier
Betreuer:	M. Sc. Timon Barlag

Erklärung der Selbstständigkeit

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelorarbeit/Masterarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keinem anderen Prüfungsamt vorgelegen.

Hannover, den 17. Juni 2023

Laura Reinhardt

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Wissenschaft der Informatik, und somit auch der theoretischen Informatik, ist nach wie vor sehr neu. Daraus lässt sich schließen, dass viele Punkte in der Thematik noch unerforscht sind, oder bisher nur lückenhaft dargestellt werden konnten. In dieser Arbeit wird es sich dabei hauptsächlich um die Entscheidung von logischen Theorien und ihre Einordnung in Komplexitätsklassen handeln. Diese Einordnungen beruhen hierbei auf den Eigenschaften der benötigten Zeit- und Platzaufwände einer Turing Maschine zur Entscheidung ob eine Theorie einen logischen Satz enthält. Ein Modell zur Untersuchung der eben genannten Aspekte und somit auch zur weiteren Erforschung von logischen Theorien, und ihren Beziehungen untereinander, ist die Methode der Ehrenfeucht Spiele.

Die Ehrenfeucht Spiele sind ein automatenbasiertes Entscheidungsverfahren, dass eine endliche Darstellung von unendlichen Strukturen durch Induktion ermöglicht. Mithilfe der Ehrenfeucht Spiele wird es möglich, dass Automaten nur einzelne endliche Teilmengen über unendlichen Wörtern betrachten können, was vor allem im Kontext der endlichen Modelltheorie wichtig wird. Da sich anhand dieser endlichen Mengen einzelne Eigenschaften, wie beispielsweise Äquivalenzen, besser untersuchen lassen, wird es möglich, Ergebnisse auf ähnliche Probleme zu übertragen. Dadurch wird die Analyse von Ähnlichkeiten und Unterschieden zwischen einzelnen Teilstrukturen einer logischen Theorie wesentlich vereinfacht und bestimmt, ob eine Prädikatenlogik erster Stufe, anhand der Ehrenfeucht Spiele, entscheidbar ist. Die Ehrenfeucht Spiele kategorisieren Sätze nach Zugehörigkeit zu einer logischen Theorie. Die Sätze in der Aussagen als wahr gelten, sind Teil der Theorie, und die anderen Sätze, in denen Aussagen dann nicht zutreffend sind, sind somit keine Bestandteile der betrachteten Theorie. Weiterhin kann die Beweistechnik der Ehrenfeucht Spiele verwendet werden, um die komplexitätstheoretischen Schranken von logischen Theorien zu ermitteln.

Insgesamt hat die Bachelorarbeit das Ziel, die Kenntnisse über die Ehrenfeucht Spiele und ihre Anwendung in Zusammenhang mit logischen Theorien aufzuzeigen. Die Erkenntnisse sollen dabei durch eine beispielhafte Anwendung der Ehrenfeucht Spiele mit ganzzahliger Addition veranschaulicht werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit soll hauptsächlich die Methodik der Ehrenfeucht Spiele auf Grundlage der Untersuchungen von Jeanne Ferrante und Charles W. Rackoff thematisiert werden. Um das genaue Beispiel der ganzzahligen Addition im dritten Kapitel nachvollziehbar zu gestalten, werden in Kapitel zwei vorerst einige Grundlagen erklärt. Dazu wird kurz erläutert, welche Prädikatenlogik angewendet wird. Danach werden einige Grundlagen der Komplexitäts- und Berechenbarkeitstheorie, sowie die Ehrenfeucht Spiele erklärt. In Kapitel drei wird eine beispielhafte Anwendung der Ehrenfeucht Spiele, anhand der ganzzahligen Addition, behandelt. Zum Schluss werden dann noch einmal die wichtigsten Ergebnisse im Fazit zusammengefasst und in den Kontext der Arbeit eingeordnet.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel sollen einige wichtige Grundlagen geklärt werden. Für die späteren Betrachtungen zur Ermittlung von Komplexität logischer Theorien, und ihre Einordnung in das Themengebiet der Komplexitätstheorie, werden die folgenden Grundlagen benötigt. Diese dienen dazu, spätere Erkenntnisse sinnvoll verstehen zu können. Wenn für die folgenden Definitionen nicht anders genannt, sind diese aus „The Computational Complexity of Logical Theories“ von Jeanne Ferrante und Charles W. Rackoff ([FR79]).

2.1 Logik

Die Anwendung der Ehrenfeucht Spiele setzt die Benutzung von logischen Sprachen voraus. Allgemein erklärt wird Logik verwendet, um Entscheidungen zur Wahrheit und Unwahrheit über Aussagen zu treffen. Dabei handelt es sich bei den Ehrenfeucht Spielen um die Prädikatenlogik erster Stufe, sowie die der monadischen zweiten Stufe. In dieser Arbeit wird jedoch nur die Prädikatenlogik erster Stufe eingesetzt, wobei ihre Wörter aus Logik- und Variablensymbole, einer Menge von Relations-, Konstanten-, und Funktionssymbolen, aus einer gegebenen Signatur σ, aufgebaut sind. Die einzelnen Symbolmengen der Relationen, Konstanten und Funktionen können auch leer bleiben. Bei der weiteren Verwendung der Prädikatenlogik im Zusammenhang mit den Ehrenfeucht Spielen werden keine Funktionssymbole erlaubt, das bedeutet diese Menge bleibt leer. Ebenso gibt es bei der Anwendung mit den Ehrenfeucht Spielen nur eine endliche Menge an Relationssymbolen und nur eine mögliche Konstante e.

Definition 1 ([Dal94], S.59)**.** *Eine endliche Signatur σ ist eine geordnete Reihenfolge von nichtlogischen Symbolen $\langle R_1, \ldots, R_i; \kappa\rangle$. Bei $R_1, \ldots, R_i$ handelt es sich um Relationssymbole, und κ ist ein Konstantensymbol.*

Definition 2. *Eine Formel F einer Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe, mit einer vorgegebenen Signatur σ, ist aus folgenden Zeichen aufgebaut:*

- *formale Variablen x_0, x_1, ... , x_n*
- *logische Symbole* $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, (\ ,\ )$
- *eine endliche Menge an Relationen R_1, R_2, ... , R_l wobei R_i das i-te Relationssymbol darstellt mit* $1 \leq i \leq l$

- *eine mögliche Konstante e.*

Atomare Formeln aus F haben die Form $R_i(v_1, v_2, ..., v_{t_i})$*, wobei* $(v_1, v_2, ..., v_{t_i})$ *formale Variablen darstellen. Wenn die Prädikatenlogik eine Konstante e enthält, so kann* v_j *mit* $1 \leq j \leq t_i$ *eine formale Variable oder die Konstante e darstellen.*
Eine Formel F kann mit Audrücken bestehend aus Relationen R_i *und formalen Variablen* $(v_1, v_2, ..., v_{t_i})$ *zusammengesetzt werden:*

$$(v_1 \wedge v_2); (v_1 \vee v_2); (v_1 \rightarrow v_2); \sim (v_1); \forall v_1; \exists v_1 \tag{2.1}$$

Weiterhin werden die Formeln rekursiv definiert. Wenn F_1 *und* F_2 *Formeln sind, so sind folgende Ausdrücke ebenfalls Formeln:*

$$(F_1 \wedge F_2); (F_1 \vee F_2); (F_1 \rightarrow F_2); \sim (F_1); \forall x F_1; \exists x F_1 \tag{2.2}$$

Beispiel 1. *Ein einfaches Bespiel für eine Formel der Prädikatenlogik erster Strufe wäre die Beschreibung der mathematischen Reflexivität, wobei der Allquantor ein logisches Symbol darstellt, x die formale Variable, und* $\leq$ *dem Relationssymbol entspricht.*

$$\forall x \colon x \leq x \tag{2.3}$$

Um die Entscheidbarkeit einer logischen Theorie in Bezug auf ihre zugehörigen Formeln mithilfe der Ehrenfeucht Spiele bestimmen zu können, muss die Sprache in kleinere, endliche Teilsprachen mit jeweils einer endlichen Anzahl an Quantoren aufgeteilt werden. Der Vorteil liegt darin, dass Teilmengen, die später bei den Ehrenfeucht Spielen mit Strukturen dargestellt werden, eine Übersichtlichkeit schaffen, mit der wesentlich einfacher gearbeitet werden kann.

Dabei enthält eine Struktur, über eine Signatur σ, eine nicht leere Menge, Relationen und möglicherweise eine Konstante. Durch die Verwendung dieser Strukturen lassen sich dann Wahrheitsaussagen zu Formeln einer Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe treffen.

Definition 3. *Eine* σ*-Struktur* $\mathcal{A}$ *ist aufgebaut aus einer nicht leeren, endlichen Menge A, die als Universum der Struktur* $\mathcal{A}$ *bezeichnet wird. Weiterhin gibt es* $R_i \subseteq A^{t_i}$ *für* $1 \leq i \leq l$*, wobei* t_i *der Arität des i-ten Relationssymbol in* σ *entspricht. Wenn L eine Konstante* $e \in A$ *hat, gilt:*

$$\mathcal{A} = \langle A, R_1, ..., R_l, e \rangle \tag{2.4}$$

Dabei sind A und $R_1, ..., R_l$ *wie vorher bereits beschrieben, definiert. Falls eine Struktur keine Konstante enthält, wird sie dem folgenden Tupel ausgedrückt:*

$$\mathcal{A} = \langle A, R_1, ..., R_l \rangle \tag{2.5}$$

Für die Ehrenfeucht Spiele werden die einzelnen Formeln in der pränexen Normalform verwendet. Daraus folgt, dass die Quantoren vor der eigentlichen Formel stehen, wobei die Anzahl der Quantoren nicht verändert wird. Die pränexe Normalform dient im Konext dieser Arbeit dazu die einzelnen Formeln vegleichbar zu machen.

Definition 4. *Eine prädikatenlogische Formel F erster Stufe ist in pränexer Normalform, falls gilt:*

$$F = Q_1 x_1 Q_2 x_2, ..., Q_k x_k \; F' \tag{2.6}$$

F' ist dann eine Formel ohne Quantoren.

2.2 Komplexitäts- und Berechenbarkeitstheorie

Das Ziel der Komplexitätstheorie ist die allgemeine Analyse von Problemen in Hinsicht auf ihre Komplexität. Mit der Komplexität ist jegliche Art von Ressourcenverbrauch gemeint, die ein Algorithmus braucht, um ein Problem zu lösen.

Definition 5 ([WD97])**.** *Eine Theorie TH ist eine Menge von logischen Sätzen über eine Signatur σ. Logische Sätze sind Formeln ohne freie Variablen. Für eine Aussage δ gilt TH $\models \delta$, falls für alle Strukturen C gilt: C $\models$ TH, so gilt auch C $\models \delta$.*

Die Ehrenfeucht Spiele werden verwendet um zu beurteilen inwiefern logische Sätze Bestandteil einer logischen Theorie sind.

In dieser Arbeit wird zur Untersuchung von Theorien, anhand der Ehrenfeucht Spiele, die Zeit- und Platzkomplexität betrachtet. Anhand der ermittelten Komplexität kann die praktische Umsetzung eines Algorithmus in Hinsicht auf Zeit und Platz vorbestimmt werden, oder auch der Entwurf neuer Algorithmen und Lösungen erleichtert werden. Ebenso wird die Komplexiät verwendet um Sätze zu klassifizieren, indem mit Ehrenfeucht Spielen ermittelt wird, ob diese zu einer Theorie zugehörig sind oder nicht. Die logischen Theorien werden also in sogenannte Komplexitätsklassen eingeordnet, wobei jede Klasse verschiedene Eigenschaften der Komplexität widerspiegelt. Zu beachten ist, dass viele Eigenschaften der einzelnen Klassen und ihre Beziehungen untereinander noch nicht vollständig erfasst worden sind. Um Ähnlichkeiten oder Unterschiede zwischen Problemen festzustellen, werden einzelne Teilprobleme miteinander verglichen, sodass sich die Ergebnisse von verschiedenen Problemen aufeinander übertragen lassen. Diese Eigenschaften zur Ähnlichkeit von Aussagen innerhalb einer Theorie können anhand der Ehrenfeucht Spiele analysiert werden. Damit soll überprüft werden, ob eine Formel oder eine Aussage Bestandteil einer logischen Theorie ist.

Notation 1. *Sei γ ein Satz aus einer Prädikatenlogik erster Stufe L, und $\mathcal{A}$ sei eine Struktur* *derselben Sprache, dann ist γ in $\mathcal{A}$ wahr oder auch $\mathcal{A}$ erfüllt γ, mit:*

$$\mathcal{A} \models \gamma \tag{2.7}$$

$F(\bar{x}_k)$ sei eine erfüllende Formel für eine Struktur $\mathcal{A}$. Für $k = 0$ gilt dann $\mathcal{A} \models F$. Für $k > 0$, sind $a_1, \ldots, a_k \in A$ mit:

$$(\mathcal{A}, \bar{a}_k) \models F(\bar{a}_k) \tag{2.8}$$

Gerade in Hinsicht auf Zeit- und Platzkomplexität lassen sich mit einer Turing Maschine komplexitätstheoretische Schranken einer Theorie ermitteln. Die untere Schranke beschreibt somit die Zeit oder den Platz die mindestens von einer Turing Maschine benötigt wird um eine Berechnung, zur Entscheidung ob eine Formel zu einer Theorie gehört, auszuführen. Für die obere Schranke wird ermittelt, wie viel Zeit oder Platz eine Turing Maschine maximal in Anspruch nimmt. Außerdem kann eine Theorie als entscheidbar gezeigt werden, wenn eine Turing Maschine für jeden Satz einer Struktur entscheiden kann, dass ein Satz Bestandteil einer Theorie ist.

Definition 6 ([EFT07])**.** *Eine logische Theorie TH ist entscheidbar, falls es für beliebige Sätze γ, ein Entscheidungsverfahren gibt, dass in endlich vielen Schritten bestimmt ob γ zu einer Theorie TH gehört oder nicht.*

2.3 Ehrenfeucht Spiele

Die Ehrenfeucht Spiele werden für die Bestimmung von komplexitätstheoretischen Schranken logischer Theorien und zum Prüfen von Sätzen auf Zugehörigkeit zu Theorien verwendet. Ganz elementar kann mit der Prozedur die Äquivalenz von Strukuren nachgewiesen werden. Weiterführend wird dann mit den Ehrenfeucht Spielen ermittelt, ob eine logische Theorie entscheidbar ist. Die Entscheidbarkeit folgt aus der Definition der Entscheidbarkeit (Def. 6). Mithilfe der Analysen anhand der Ehrenfeucht Spiele werden Sätze durch Wahrheit oder Unwahrheit in eine logische Theorie eingeordnet, oder aussortiert. Außerdem lassen sich durch Sätze, logische Theorien einfacher in Komplexitätsklassen einordnen und helfen weitere Kenntnisse über sie zu erhalten.

Grundlegend werden bei der Anwendung der Ehrenfeucht Spiele endliche Strukturen und die Formeln einer Sprache erster Stufe betrachtet. Um zu überprüfen, ob eine prädikatenlogische Formel der ersten Stufe als wahr gilt, wird validiert ob diese in einzelnen endlichen Strukturen als wahr gilt. Indem man dann Strukturen auf Äquivalenz untersucht, können Ergebnisse zur Gültigkeit von Sätzen und Formeln übertragen werden. Wenn eine Formel F in einer Struktur $\mathcal{A}$ wahr ist, und dann äquivalente Strukturen zu $\mathcal{A}$ existieren, so ist F auch in den äquivalenten Strukturen zu $\mathcal{A}$ wahr. Die Äquivalenz zweier Strukturen bedeutet, dass zwischen den beiden Strukturen ein partieller Isomorphismus bestehen muss und entspricht der Aussage des Satzes von Fraïssé. Dieser Satz von Fraïssé ist eine Voraussetzung zur Anwendung der Ehrenfeucht Spiele, da die Äquivalenzdefinition der Ehrenfeucht Spiele in dieser Arbeit später auf dem Satz von Fraïssé aufbauen wird. Äquivalenzen sind dabei gleichbedeutend mit der Existenz von Relationen, die in beiden Universen definiert sind und bestimmte Bedingungen erfüllen. [Tho93]

Definition 7 ([EFT07]). *Zwischen zwei endlichen Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ über eine Signatur σ herrscht ein partieller Isomorphismus nach dem Satz von Fraïssé wenn die Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ definiert sind wie in Def. 3. Es gibt eine injektive Abbildung p mit $p\colon A \to B$ mit Definitionsbereich $def(p) \subseteq A$ und Bildmenge $bild(p) \subseteq B$. Es gibt eine Konstante c mit c^A als Konstante aus der Menge A und c^B eine Konstante aus der Menge B. Der partielle Isomorphismus wird dann wie folgt beschrieben:*

$$c^A \in def(p) \Rightarrow p(c^A) = c^B \tag{2.9}$$

$$c^B \in bild(p) \Rightarrow c^A \in def(p) \text{ und } p(c^A) = c^B \tag{2.10}$$

Dabei beschreibt der partielle Isomorphismus die Äquivalenz zwischen den beiden Strukturen mit $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, da sie dann die gleichen Sätze der ersten Stufe erfüllen.

Die Quantorentiefe beschreibt die Anzahl von verschachtelten Quantoren in einer Formel. Sie gibt später vor wie viele Runden die Ehrenfeucht Spiele zur Berechnung der Unterschiede oder zur Bestimmung der Gleichheit brauchen. Mit der Quantorentiefe n benötigen die Ehrenfeucht Spiele also maximal n Runden, bis das Ergebnis des Spiels feststeht.

Definition 8. *Die Quantorentiefe Qt einer Formel F beschreibt die maximale Anzahl an verschachtelten Quantoren in F.*

- *Wenn F eine atomare Formel ist so beträgt die Quantoretiefe $Qt(F) = 0$*
- *Wenn F_1 und F_2 Formeln sind, dann gilt:*

$$Qt(F_1 \wedge F_2) = Qt(F_1 \vee F_2) = Qt(F_1 \to F_2) = Max\{Qt(F_1), Qt(F_2)\} \tag{2.11}$$

$$Qt(\sim (F_1)) = Qt(F_1) \tag{2.12}$$

- *Q ist ein Quantor mit $Q \in \{\exists, \forall\}$ und v ist eine formale Variable, dann gilt:*

$$Qt(QvF) = 1 + Qt(F) \tag{2.13}$$

Um zu bestimmen ob Formeln Bestandteil einer logischen Theorie sind, werden diese Formeln in die pränexe Normalform (Definition 4) umgeformt. Der Zweck dabei ist es,

dass die endlichen Quantoren aus der Formel gefiltert werden, da die Anzahl der Quantoren im Präfix der Quantorentiefe entspricht. Die Quantorentiefe ist eine relevante Eigenschaft um die Ähnlichkeit der betrachteten Strukturen ermitteln zu können. Eine logische Theorie ist entscheidbar, wenn man mithilfe eines geeigneten Verfahrens, hier beispielsweise das Ehrenfeucht Verfahren, zeigen kann, dass eine Formel, oder ihre Negation, Mitglied in der Theorie ist. Wenn gezeigt wurde, dass eine logische Theorie TH entscheidbar ist, kann man diese Ergebnisse auf ähnliche Theorien übertragen.
Dabei beruht die Äquivalenz, die zum Vergleich von Strukturen in Ehrenfeucht Spielen verwendet wird, auf der Definition der partiellen Isomorphie.

Definition 9. *Die Ehrenfeucht Äquivalenz $\equiv_{n,k}$ für zwei Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist wie folgt definiert: Es gibt $n, k \in \mathbb{N}$, wobei n der Quantorentiefe von Sätzen, die von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ erfüllt werden, entspricht. Die Elemente werden mit den Tupeln $\bar{a}_k = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\bar{b}_k = b_1, \ldots, b_k \in B$ und $k \leq n$ beschrieben. Für die Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $|A| \geq 2^k$, $|B| \geq 2^k$ muss*
$(\mathcal{A}, \bar{a}_k) \equiv_{n,k} (\mathcal{B}, \bar{b}_k)$ gelten, damit ein partieller Isomorphismus wie in Definition 7 dargestellt wird. Dabei ist $(\mathcal{A}, \bar{a}_k)$ eine Struktur mit Belegung $\bar{a}_k$ und $(\mathcal{B}, \bar{b}_k)$ eine Struktur mit Belegung $\bar{b}_k$.
$(\mathcal{A}, \bar{a}_k) \equiv_{n,k} (\mathcal{B}, \bar{b}_k)$ gilt, wenn für alle Formeln $F(\bar{x}_k)$, mit der Signatur wie in Definition 1 und Quantorentiefe $Qt(F(\bar{x}_k)) \leq n$ gilt:
Die Formel $F(\bar{x}_k)$ wird genau dann von a_k in der Struktur $\mathcal{A}$ erfüllt, wenn b_k die Formel $F(\bar{x}_k)$ in der Struktur $\mathcal{B}$ erfüllt. Also folgt:

$$\mathcal{A} \equiv_{n,k} \mathcal{B} \text{ gdw. } |A| = |B| = n \text{ und f.a. } a_1, \ldots, a_k \in A \text{ und } b_1, \ldots, b_k \in B \tag{2.14}$$

mit

$$(\mathcal{A}, \bar{a}_k) \models F(\bar{x}_k) \Leftrightarrow (\mathcal{B}, \bar{b}_k) \models F(\bar{x}_k) \tag{2.15}$$

Damit die Entscheidungsprozeduren möglichst effiziente Beschreibungen der logischen Theorien wiedergeben, müssen die Strukturen der Sprache endlich und begrenzt sein. Bei dieser Begrenzung spricht man von der H-Begrenzung. Bei der H-Begrenzug handelt es sich um eine rekursive Funktion H, die es ermöglicht, unendliche Strukturen in einem endlichen Kontext darzustellen.

Definition 10. *Eine Struktur $\mathcal{A}$ ist H-begrenzt, wenn gilt:*

$\mathcal{A}$ ist definiert wie in Def. 3. Außerdem ist Σ ein endliches Alphabet, wobei $\Sigma^* \cup \{\infty\}$ die Menge aller Wörter über dem Alphabet darstellt. Dabei ist m ein Wort aus dieser Menge. Die Menge A^k entspricht der Menge aller Tupel über dem Universum A mit der Länge k. Die Größe des Universums wird durch n beschrieben. Es gilt:

$$H\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times (\Sigma^* \cup \{\infty\}) \to \Sigma^* \cup \{\infty\} \tag{2.16}$$

$$n, k \in \mathbb{N}_0;\ m \in \Sigma^* \cup \{\infty\} \textit{ mit } a_k \in A^k\ ,\ a_i \leq m \textit{ für alle } 1 \leq i \leq k \tag{2.17}$$

Weiterhin gilt für alle Formeln $F(\bar{x}_{k+1})$ mit Quantorentiefe $Qt(F(\bar{x}_{k+1})) \leq n$: Wenn eine Belegung der Struktur $(\mathcal{A}, \bar{a}_k)$ eine Formel $\exists x_{k+1} F(\bar{x}_{k+1})$ erfüllt mit $(\mathcal{A}, \bar{a}_k) \models \exists x_{k+1}\ F(\bar{x}_{k+1})$, so gibt es eine weitere Belegung mit $a_{k+1} \leq H(n, k, m)$, sodass $(\mathcal{A}, \bar{a}_{k+1}) \models F(\bar{x}_{k+1})$ gilt.

$$(\mathcal{A}, \bar{a}_k) \models \exists x_{k+1} F(\bar{x}_{k+1}) \Leftrightarrow (\mathcal{A}, \bar{a}_k) \models (\exists x_{k+1} \leq H(n, k, m)) F(\bar{x}_{k+1}) \tag{2.18}$$

Für alle Sätze und Formeln einer Struktur kann ein größeres Element gefunden werden. Alle Strukturen lassen sich durch ∞ begrenzen, jedoch orientiert sich die Begrenzung immer an der Belegung der Struktur mit $(\mathcal{A}, \bar{a}_k)$.

Da es für jede Belegung von $(\mathcal{A}, \bar{a}_k)$ eine Belegung mit einem Element x_{k+1} gibt, dass $(\mathcal{A}, \bar{a}_k)$ nach oben beschränkt, kann jede Belegung von $(\mathcal{A}, \bar{a}_k)$ in einem endlichen Kontext untersucht werden, ob sie die Formel F efüllt. Ist die Formel F mit jeder Belegung erfüllt, so ist bestimmt, dass die Formel in der Menge A gültig ist. Statt eine gesamte Struktur zu untersuchen, ist es durch eine H-Begrenzung nur noch notwendig über die Elemente zu iterieren, die von m beschränkt sind. Wie genau die Anzahl an $\equiv_{n,k}$ Relationen zur Feststellung der Komplexität, also unter anderem der Begrenzung nach oben, verwendet wird, ist in Kapitel 3 genauer erläutert.

Der genaue Ablauf eines Ehrenfeucht Spiels wird im folgenden Abschnitt genauer beschrieben. Das Spiel an sich hat den Aufbau von n Spielzügen mit 2 Spielern: Spieler 1, der Spoiler, und Spieler 2, der Duplicator. Es werden im Spiel nur Mengen von Elementen betrachtet, und niemals nur einzelne Elemente. Die Teilmengen A_A und B_B wobei $A_A \cap B_B = \emptyset$, zweier Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $A_A \subseteq A$ und $B_B \subseteq B$ einer gemeinsamen Sprache, die im Spiel betrachtet werden, sollen Erweiterungen von Beziehungen und Ähnlichkeiten für diese Strukturen feststellen. Der allgemeine Ablauf des Spiels sieht dabei wie folgt aus: Eine Runde besteht immer aus zwei Spielzügen. Der Spoiler sucht sich ein beliebiges Element aus einer der Strukturen aus ($\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$). Daraufhin muss der Duplicator reagieren und entsprechend ein Element aus der Struktur wählen, die Spieler 1 nicht gewählt hat. Wenn sich also der Spoiler beispielsweise für ein Element a aus der Struktur $\mathcal{A}$ entscheidet, so muss der Duplicator ein Element b aus der Struktur $\mathcal{B}$ wählen, oder andersherum. Das Spiel ist zu Ende wenn die n Runden vorbei sind. Die Entscheidung zum Gewinnen bei n Runden wird also durch Zeit 2^n begrenzt. Der Duplicator gewinnt, wenn dieser es schafft, alle Elemente so auszuwählen, dass die Endkonfiguration und auch alle Zwischenkonfigurationen einen partiellen Isomorphismus darstellen. Damit beweist der Duplicator, dass zwei Strukturen gleichwertig sind. Der Duplicator gewinnt somit genau dann, wenn er $(\mathcal{A}, a_k) \equiv_{n,k} (\mathcal{B}, b_k)$ zeigen konnte. Spieler 1, also der Spoiler, gewinnt genau dann, wenn Spieler 2 nicht gewinnt, womit dieser beweist, dass zwei Strukturen zueinander verschieden sind. Es wird erkennbar, dass beide eine andere Gewinnstrategie verfolgen. Während der Duplicator immer versucht einen Isomorphismus zu erzeugen und auch beizubehalten, versucht der Spoiler, genau das zu verhindern, indem er versucht, die Isomorphismen durch seine Wahl ungültig zu machen. [Kou+06][Mau97]

Wie der Spoiler den Beweis erbringen kann, dass zwei Strukturen nicht isomorph zueinander sind, wird anhand des Satzes von Ehrenfeucht deutlich. Dieser besagt, dass es in einem Spiel mit n Runden, einen Satz mit der Quantorentiefe (Def. 8) n geben muss, der die Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ voneinander unterscheidet. Eine formale Beschreibung des Spiels sieht zusammengefasst also wie folgt aus:

(1) Der Spoiler wählt ein beliebiges Element a aus $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$

(2) Der Duplicator wählt ein Element b aus der jeweils anderen Struktur, sodass die Elemente einen partiellen Isomorphismus $(\mathcal{A}, a_k) \equiv_{n,k} (\mathcal{B}, b_k)$ darstellen

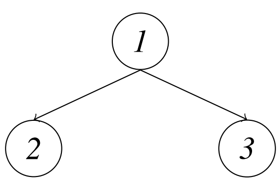
(3) Zurück zu 1, solange bis n Runden gespielt wurden.

Ergebnis (1) oder (2):

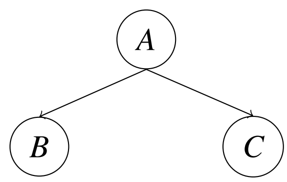
(1) Der Duplicator gewinnt, wenn in allen n Runden ein partieller Isomorphismus gezeigt werden kann

(2) Der Spoiler gewinnt genau dann, wenn der Duplicator nicht gewinnt oder der Spoiler mindestens einen partiellen Isomorphismus widerlegen kann

Beispiel 2. *Es sind zwei Graphenstrukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben. Da diese beiden Strukturen offensichtlich einen Isomorphismus darstellen, wird im folgenden gezeigt, wie der Duplicator das Spiel gewinnt.*

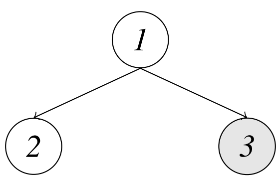


Teilgraph 1: Struktur $\mathcal{A}$

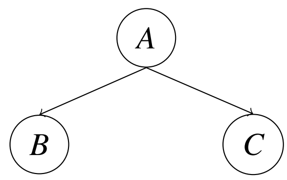


Teilgraph 2: Struktur $\mathcal{B}$

Der Spoiler markiert seine Wahl im folgenden mit einem hellen Grau, der Duplicator mit einem dunklen Grau über dem Knoten. Spoiler wählt zufällig zuerst den Knoten 3 aus Struktur $\mathcal{A}$.

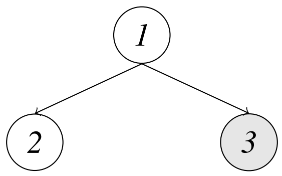


Teilgraph 1: Spoiler hat 3 gewählt

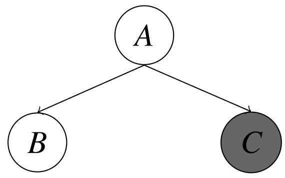


Teilgraph 2: Struktur $\mathcal{B}$

Der Duplicator muss nun einen Knoten wählen um zu beweisen, dass beide Graphen äquivalent sind, da dies seine Gewinnstrategie ist. Somit wählt der Duplicator den Knoten C, jedoch aus der anderen Struktur $\mathcal{B}$.

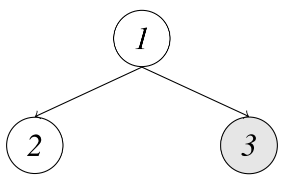


Teilgraph 1: Spoiler hat 3 gewählt

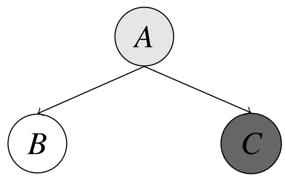


Teilgraph 2: Duplicator hat C gewählt

Runde 1 ist beendet und Duplicator hat sein Ziel erfüllt, da anhand der ausgewählten Knoten ein partieller Isomorphismus besteht. Der Spoiler versucht nun also im nächsten Zug wieder einen Knoten zu finden, der dem partiellen Isomorphismus widersprechen soll. Den nächsten Knoten, hier A, wählt der Spoiler nun aus $\mathcal{B}$, da er nicht zwei Züge hintereinander in der gleichen Struktur wählen darf.

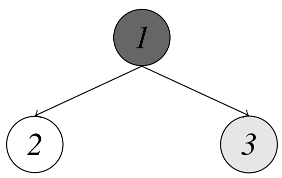


Teilgraph 1: Spoiler hat 3 gewählt

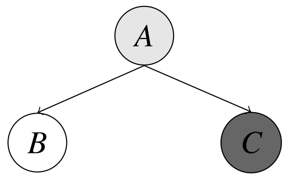


Teilgraph 2: Spoiler hat A gewählt

Nun reagiert der Duplicator wieder entsprechend mit seiner Entscheidung um das Zeigen der Äquivalenz aufrecht zu erhalten. Er wählt also Knoten 1 aus $\mathcal{A}$.

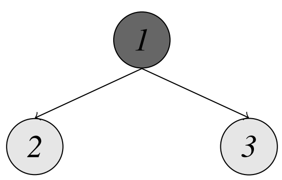


Teilgraph 1: Duplicator hat 1 gewählt

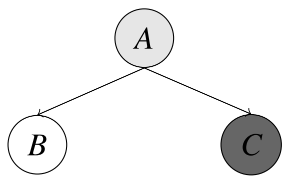


Teilgraph 2: Spoiler hat A gewählt

Der Spoiler wählt nun den letzten verfügbaren Knoten in $\mathcal{A}$, die 2, in der Hoffnung, dass der Duplicator keinen passenden Knoten mehr findet.

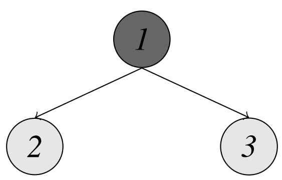


Teilgraph 1: Spoiler hat 2 gewählt

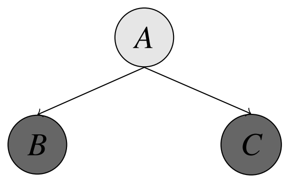


Teilgraph 2: Spoiler hat A gewählt

Der Duplicator kann jedoch auch mit seinem letzten gewählten Knoten B in $\mathcal{B}$ den partiellen Isomorphismus weiterhin aufrecht erhalten.



Teilgraph 1: Spoiler hat 2 gewählt



Teilgraph 2: Duplicator hat B gewählt

Somit gewinnt der Duplicator in jedem einzelnen Zug und somit auch das gesamte Spiel. Damit hat der Duplicator gezeigt, dass Teilgraph 1 und Teilgraph 2 partiell isomorph zueinander sind. Die beiden Strukturen sind also Ehrenfeucht äquivalent, $\mathcal{A} \equiv_{n,k} \mathcal{B}$, zueinander.

3 Ganzzahlige Addition - Ehrenfeucht Spiele

Da die Ehrenfeucht Spiele unter anderem verwendet werden, um komplexitätstheoretische obere und untere Schranken zur Entscheidung, inwiefern Sätze zu einer Theorie gehören, zu bestimmen. Im folgenden Beispiel wird die Ermittlung einer oberen Platzschranke der ganzzahligen Addition veranschaulicht. Das folgende Beispiel und der Beweis basieren auf den Notationen von Jeanne Ferrante und Charles W. Rackoff aus „The Computational Complexity of Logical Theories" ([FR79]).

3.1 Grundlegender Aufbau

Gegeben ist eine Sprache L_1 erster Stufe mit der Struktur $\mathbb{Z} = \langle Z, +, \leq, 0\rangle$. Weiterhin gelten für die Sprache L_1 die formalen Prädikate mit $v_1 + v_2 = v_3$ und $v_1 \leq v_2$, und das Konstantensymbol 0. Die zugehörige Theorie ist folgendermaßen aufgebaut:

Definition 11. *TH($\mathbb{Z}$) wird die Theorie von $\mathbb{Z}$ genannt. Es gilt:*

$$TH(\mathbb{Z}) = \{F |\ F \text{ ist ein Satz und es gilt } F \in L_1 \text{ und } \mathbb{Z} \models F\} \tag{3.1}$$

Um zu zeigen, dass diese Theorie TH($\mathbb{Z}$) entscheidbar ist, werden die Ehrenfeucht Spiele angewendet, jedoch unter der Bedingung und Grundlage der Quantorenelimination. Das bedeutet, wenn jeder Satz der Sprache sich in einen Satz ohne Quantoren umformen lässt, so besitzt ihre zugehörige Theorie TH($\mathbb{Z}$) Quantorenelimination. Jede Theorie mit Quantorenelimination kann in eine Prozedur der Ehrenfeucht Spiele umgewandelt werden.

Definition 12 ([EFT07])**.** *Die Quantorenelimination Qe einer beliebigen Theorie TH(T) bedeutet, dass alle Sätze F aus der Theorie T äquivalent in Sätze F′ der Theorie T ohne Quantoren überführt werden können. Jeder Ausdruck γ kann also wie folgt einem quantorenfreien Ausdruck γ' zugeordnet werden:*

$$TH(T) \models (\forall x_1, ..., \forall x_n \gamma(x_1, \ldots, x_n)) \Leftrightarrow \gamma' \tag{3.2}$$

Alle möglichen Prozeduren der Quantorenelimination lassen es zu, die Sätze der Theorie TH($\mathbb{Z}$) in einer Ehrenfeucht Spiel Methodik zu untersuchen, ohne dabei große Änderungen der Komplexität in Hinsicht auf Zeit und Platz zu unternehmen. Für den folgenden Beweis wird die unendliche Menge der ganzen Zahlen induktiv durch die Teilmengen V_i mit $i \leq n$ beschrieben, um sich an die unendliche Menge Z durch immer größer werdende endliche Mengen V_i für immer größer werdende i anzunähern.[Eis09]

Definition 13. *Falls $A \subseteq \mathbb{Z}$, dann ist $kgV(A)$ die kleinste positive Zahl, die von jeder Zahl aus $A \setminus \{0\}$ dividiert wird. Zusätzlich wird die Reihenfolge der Teilmengen $V_0, V_0', V_1, V_1', ...$ definiert:*

- $V_0 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
- $V_i' = \{\frac{\delta}{v} \cdot v' \mid \delta = kgV(V_i)\ ;\ v, v' \in V_i; v \neq 0\}$ *für alle* $i \geq 0$;
- $V_{i+1} = V_i \cup \{a + b \mid a, b \in V_i'\}$ *für* $i \geq 0$

Um im folgenden Beweis die H-Begrenzung und weiterhin die Entscheidbarkeit von TH($\mathbb{Z}$) zu zeigen, werden Ehrenfeucht Relationen $\equiv_{n,k}$ der Struktur $\mathbb{Z}$ durch Äquivalenzklassen $E_{n,k}$, von der Struktur $\langle Z, a_k \rangle$ mit $a_k \in Z^k$ verfeinert. Zuerst gilt es die Relationen $E_{n,k}$ allgemein für TH($\mathbb{Z}$) zu definieren.

Definition 14. *Die Äquivalenzrelationen $E_{n,k}$ auf Z sind definiert mit $n, k \in \mathbb{N}_0$; $\bar{a}_k, \bar{b}_k \in Z^k$ mit den Belegungen $(\mathbb{Z}, \bar{a}_k)$ und $(\mathbb{Z}, \bar{b}_k)$. Weiterhin ist $m \in \Sigma^* \cup \{\infty\}$.*

(1) $(\mathbb{Z}, \bar{a}_k)\ E_{0,k}\ (\mathbb{Z}, \bar{b}_k) \Rightarrow (\mathbb{Z}, \bar{a}_k) \equiv_{0,k} (\mathbb{Z}, \bar{b}_k)$

(2) Falls $(\mathbb{Z}, \bar{a}_k)\ E_{n+1,k}\ (\mathbb{Z}, \bar{b}_k)$ *und* $b_i \leq m$ *für alle* i, $1 \leq i \leq k$, *dann gibt es für alle* $a_{k+1} \in Z$ *ein* $b_{k+1} \in Z$, *sodass* $b_{k+1} \leq H(n, k, m)$ *und* $(\mathbb{Z}, \bar{a}_{k+1})\ E_{n,k+1}\ (\mathbb{Z}, \bar{b}_{k+1})$

Wenn (1) und (2) gelten, lässt sich eine Induktionshypothese aufstellen, dass jede Teilstruktur in $\mathbb{Z}$ H-begrenzt ist und

$$(\mathbb{Z}, \bar{a}_k)\ E_{n,k}\ (\mathbb{Z}, \bar{b}_k) \Rightarrow (\mathbb{Z}, \bar{a}_k) \equiv_{n,k} (\mathbb{Z}, \bar{b}_k) \tag{3.3}$$

für jedes $n, k \in \mathbb{N}_0$, $\bar{a}_k, \bar{b}_k \in Z$ folgt.

Es soll nun gezeigt werden, wie (3.3) aus Definition 14 (1) und (2) folgt. Dies soll per Induktion gezeigt werden. Für den Induktionsanfang mit $n = 0$ soll gelten:

$$(\mathbb{Z}, \bar{a}_k)\ E_{0,k}\ (\mathbb{Z}, \bar{b}_k) \Rightarrow (\mathbb{Z}, \bar{a}_k) \equiv_{0,k} (\mathbb{Z}, \bar{b}_k) \tag{3.4}$$

Dies gilt offensichtlich mit Definition 14 (1). Für den Induktionsschritt mit $n + 1$ soll gelten:

$$(\mathbb{Z}, \bar{a}_k)\ E_{n+1,k}\ (\mathbb{Z}, \bar{b}_k) \Rightarrow (\mathbb{Z}, \bar{a}_k) \equiv_{n+1,k} (\mathbb{Z}, \bar{b}_k) \tag{3.5}$$

Unter der Annahme, dass $(Z, \bar{a}_k)\ E_{n+1,k}\ (Z, \bar{b}_k)$ gilt, wird $(Z, \bar{a}_k) \equiv_{n+1,k} (Z, b_k)$ über die Definition der Ehrenfeucht Äquivalenz gezeigt.

Es wird also eine beliebige Formel $F(\bar{x}_k)$ mit $Qt(F(\bar{x}_k)) = n + 1$ betrachtet. Für diese Formel soll gelten:

$$\mathbb{Z} \models F(\bar{a}_k) \Leftrightarrow \mathbb{Z} \models F(\bar{b}_k) \tag{3.6}$$

Eine Formel $F(\bar{x}_k)$ mit $Qt(F(\bar{x}_k)) = n + 1$ kann mit Definition 8 (2.13) umgeformt werden zu:

$$F(\bar{x}_k) = \exists x_{k+1} G(\bar{x}_k, x_{k+1}) \tag{3.7}$$

Mit $Qt(G(\bar{x}_k, x_{k+1})) = n$. Dann soll mit (3.7) in (3.6) eingesetzt gelten:

$$\mathbb{Z} \models \exists x_{k+1} G(\bar{a}_k, x_{k+1}) \Leftrightarrow \mathbb{Z} \models \exists x_{k+1} G(\bar{b}_k, x_{k+1}) \tag{3.8}$$

Durch Symmetrie wird nur eine Richtung gezeigt. Es wird davon ausgegangen, dass die linke Seite von (3.8) gilt. Für x_{k+1} ein Element $a_{k+1} \in Z$ eingesetzt, sodass folgt:

$$\mathbb{Z} \models G(\bar{a}_{k+1}) \tag{3.9}$$

Nach Definition 14 (2) folgt aus $(\mathbb{Z}, \bar{a}_k)\ E_{n+1,k}\ (\mathbb{Z}, \bar{b}_k)$ mit einem $b_{k+1} \in Z$, dass nun gilt:

$$(\mathbb{Z}, \bar{a}_{k+1})\ E_{n,k+1}\ (\mathbb{Z}, \bar{b}_{k+1}) \tag{3.10}$$

Mit der Induktionshypothese (3.3) folgt aus (3.10):

$$(\mathbb{Z}, \bar{a}_{k+1}) \ \equiv_{n,k+1}\ (\mathbb{Z}, \bar{b}_{k+1}) \tag{3.11}$$

Mit der Definition 9 folgt:

$$\mathbb{Z} \models G(\bar{a}_{k+1}) \Leftrightarrow \mathbb{Z} \models G(\bar{b}_{k+1}) \tag{3.12}$$

Da die linke Seite von (3.12) erfüllt ist, ist auch die rechte Seite von (3.12) erfüllt. Somit folgt auch für die rechte Seite von (3.12):

$$\mathbb{Z} \models \exists x_{k+1} G(\bar{b}_k, x_{k+1}) \tag{3.13}$$

Damit ist dann auch (3.8) gezeigt, und es konnte (3.3) bewiesen werden.

Nun gilt noch zu zeigen, dass jede Teilstruktur in $\mathbb{Z}$ H-begrenzt ist. Es sind zufällige $n, k \in \mathbb{N}$ gegeben. Es gibt eine Formel $F(\bar{x}_{k+1})$ mit Quantorentiefe $Qt(F(\bar{x}_{k+1})) \leq n$. Es wird angenommen, dass folgendes für eine Formel F gilt:

$$\mathbb{Z} \models \exists x_{k+1} F(\bar{a}_k, x_{k+1}) \tag{3.14}$$

Dann wird genau wie in (3.9) ein a_{k+1} eingesetzt, sodass gilt:

$$\mathbb{Z} \models F(\bar{a}_{k+1}) \tag{3.15}$$

Da eine Zahlenreihe auf einem Körper offensichtlich auf jede Art äquivalent zu sich selbst ist, gilt:

$$(\mathbb{Z}, \bar{a}_k)\ E_{n+1,k}\ (\mathbb{Z}, \bar{a}_k) \tag{3.16}$$

Somit folgt mit Definition 14 (2) auch, dass es ein a'_{k+1} mit Eigenschaft $a'_{k+1} \leq H(n, k, m)$ gibt, mit:

$$(\mathbb{Z}, \bar{a}_{k+1})\ E_{n,k+1}\ (\mathbb{Z}, \bar{a}_k, a'_{k+1}) \tag{3.17}$$

Aufgrund von Beweis zu (3.3) ist weiterführend auch bewiesen, dass zu (3.17) gilt:

$$(\mathbb{Z}, \bar{a}_{k+1})\ \equiv_{n,k+1}\ (\mathbb{Z}, \bar{a}_k, a'_{k+1}) \tag{3.18}$$

Da (3.15) gilt, folgt durch Äquivalenz $\equiv_{n+1,k}$ auch, dass $\mathbb{Z} \models F(\bar{a}_k, a'_{k+1})$. Damit ist die Struktur $\mathbb{Z}$ als H-begrenzt gezeigt.

Die Äquivalenzrelation E_n auf Z^k beschreibt die Relationen von Tupeln der ganzen Zahlen $\bar{a}_k, \bar{b}_k \in Z^k$.

Definition 15. *Die Äquivalenzrelation E_n auf Z^k ist definiert mit $n, k \in \mathbb{N}_0$; $\bar{a}_k, \bar{b}_k \in Z^k$ und $\delta = kgV(V_n)$. Es gilt $\bar{a}_k\ E_n\ \bar{b}_k$ wenn für alle $v_1, \ldots, v_k \in V_n$ und jede Konstante $v \in \mathbb{Z}$ mit $|v| \leq \delta^2$ gilt:*

(1) $v + \sum_{i=1}^{k} v_i a_i \leq 0 \Leftrightarrow v + \sum_{i=1}^{k} v_i b_i \leq 0$

(2) $a_i \ mod\ \delta^2 = b_i \ mod\ \delta^2$ *für* $1 \leq i \leq k$

3.2 Obere Begrenzung von V_n

Um eine H-Funktion für TH($\mathbb{Z}$) zu ermitteln, gilt es zuerst einige Abschätzungen zu der induktiv definierten Menge V vorzunehmen.

Lemma 1. $|V_n| \leq 2^{2^{cn}}$ *für eine Konstante c und für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Die Behauptung in Lemma 1 soll durch mehrere Abschätzungen gezeigt werden. Anhand von Definition 13 gilt $|V_0| = 5$. Ebenso kann die Kardinalität von V'_i durch Fortführen der Mengen $V_0, V'_0, V_1, V'_1, ..., V_i, V'_i$ abgeschätzt werden, durch $|V'_i| \leq |V_i|^2$. Für die Kardinalität von V_{i+1} gilt dann $|V_{i+1}| \leq |V_i| + |V'_i|^2$. Da $|V'_i| \leq |V_i|^2$ gilt, kann $|V'_i|^2$ abgeschätzt werden mit $|V'_i|^2 \leq |V_i|^4$. Damit folgt $|V_{i+1}| \leq |V_i|^5$, sodass sich $|V_n| \leq |V_{n-1}|^5 \leq (|V_{n-2}|^5)^5$ ableiten lässt. Dann kann $(|V_{n-2}|^5)^5$ umgeformt werden zu $|V_{n-2}|^{(5*2)}$. Dies kann dann abgeschätzt werden mit $|V_{n-2}|^{(5*2)} \leq |V_0|^{5*n} \leq 5^{5*n} \leq 5^{5^n}$. Es kann somit eine Konstante c gewählt werden, die groß genug ist, dass $|V_n| \leq 5^{5^n} \leq 2^{2^{cn}}$ gilt. Lemma 1 ist somit gezeigt.

Lemma 2. *Für das größte Element aus V_n soll gelten: $Max(V_n) \leq 2^{2^{2^{cn}}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Für V_n gilt $V_n = \{-a \mid a \in V_n\}$. Mit V_0 ist das erste Maximum eindeutig, mit $\text{Max}(V_0) = 2$. Weiterhin kann abgeschätzt werden, dass das kleinste gemeinsame Vielfache beschränkt werden kann durch $kgV(V_i) \leq \text{Max}(V_i)^{|V_i|}$. Diese Abschätzung erklärt sich durch das größtmögliche kleinste gemeinsame Vielfache, dass bestimmt wird, indem das Produkt aller Elemente in V_i bestimmt wird. Damit ergibt sich die Herleitung mit $kgV(V_i) \leq \prod_{v \in V_i} v \leq \text{Max}(V_i)^{|V_i|}$. Durch Definition 13 ergibt sich als Grenze für $\text{Max}(V_{i+1})$: $\text{Max}(V_{i+1}) \leq \text{Max}(\text{Max}(V_i), 2\cdot \text{Max}(V_i'))$, da V_{i+1} eine vereinigte Menge zusammengesetzt aus V_i und allen möglichen Additionen von zwei Elementen aus V_i' ist. Somit muss das Maximum von V_{i+1} aus einer dieser Teilmengen V_i, V_i' sein. Das Maximum wird immer $2\cdot\text{Max}(V_i')$ sein. Die Konstante dieser Abschätzung kann dann rausgezogen werden, sodass weiterführend folgt:
$\text{Max}(V_{i+1}) \leq \text{Max}(\text{Max}(V_i), 2\cdot \text{Max}(V_i')) \leq 2 \cdot kgV(V_i)\cdot \text{Max}(V_i)$ da
$\text{Max}(V_i') \leq \frac{\delta}{1}\cdot\text{Max}(V_i)$ und $\delta = kgV(V_i)$. Da sich $|V_n| \leq 5^{5^n}$ abschätzen lässt und $kgV(V_i)$ sich mit $kgV(V_i) \leq \text{Max}(V_i)^{|V_i|}$ abschätzen lässt, folgt insgesamt:
$2 \cdot kgV(V_i)\cdot\text{Max}(V_i) \leq 2 \cdot (\text{Max}(V_i))^{5^{5^i}} \cdot\text{Max}(V_i) \leq (\text{Max}(V_i))^{6^{6^i}}$. Damit wird $\text{Max}(V_n)) \leq 2^{(6^{6^n})^n}$ abgeschätzt. Wie in Lemma 1 kann somit wieder eine Konstante c gewählt werden, dass $\text{Max}(V_n) \leq 2^{(6^{6^n})^n} \leq 2^{2^{2^{cn}}}$ gilt.

3.3 Beweis der H-Begrenzung von $\mathbb{Z}$

Im folgenden Abschnitt soll gezeigt werden, dass $\mathbb{Z}$ durch eine Funktion H-begrenzt ist. Diese Funktion gilt es im Folgenden zu ermitteln, indem Definition 14 (1) und (2) mit Induktion bewiesen werden. Definition 14 (1) stellt dabei den Induktionsanfang und (2) den Induktionsschritt dar.

Lemma 3. *Die Theorie TH($\mathbb{Z}$) ist begrenzt mit: TH($\mathbb{Z}$) $\leq (m+1)2^{2^{2^{c\cdot(n+k)}}}$ für $n, k, m \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.*

Für den Induktionsanfang gilt: Falls $n, k \in \mathbb{N}^+$ dann $\bar{a}_k \; E_{0,k} \; \bar{b}_k \Rightarrow \bar{a}_k \equiv_{0,k} \bar{b}_k$ nach Definition 14 (1), wobei $n = 0$ für die atomaren Formeln.
Um nun zu zeigen, dass $\bar{a}_k \equiv_{0,k} \bar{b}_k$ gilt, müssen sowohl $\bar{a}_k$ als auch $\bar{b}_k$ die gleichen atomaren Formeln erfüllen. Für unsere Struktur sind dies die atomaren Formeln der Addition und der $\leq$-Ordnung. Es soll also folgendes gelten:

$$a_i + a_j = a_l \Leftrightarrow b_i + b_j = b_l \; \forall i, j, l\colon 1 \leq i, j, l \leq k \tag{3.19}$$

$$a_i \leq a_j \Leftrightarrow b_i \leq b_j \; \forall i, j\colon 1 \leq i, j \leq k \tag{3.20}$$

Nach Definition 15 (1) lässt sich $a_k\ E_0\ b_k$ auch ausdrücken mit:

$$0 + \sum_{i=1}^{k} v_i a_i \leq 0 \Leftrightarrow 0 + \sum_{i=1}^{k} v_i b_i \leq 0 \tag{3.21}$$

Der Beweis des Induktionsanfangs wird durch Kontraposition gezeigt. Es soll nun statt (3.19) die folgende Kontraposition betrachtet werden:

$$\exists\, i, j, l :\ a_i + a_j = a_l \not\Leftrightarrow b_i + b_j = b_l \tag{3.22}$$

mit

$$\exists\, i, j, l :\ a_i + a_j = a_l \Leftrightarrow b_i + b_j \neq b_l \tag{3.23}$$

Wenn (3.23) gilt, dann gibt es keine Möglichkeit, dass (3.21) gilt. Im Folgenden werden zwei Belegungen für v_i mit $1 \leq i \leq k$ aus V_0 betrachtet, die (3.23) widerlegen. Dafür werden drei beliebige Zahlen $i_1, i_2, i_3 \leq k$ ausgesucht und in (3.23) eingesetzt mit:

$$\exists\, i, j, l :\ a_{i_1} + a_{i_2} = a_{i_3} \Leftrightarrow b_{i_1} + b_{i_2} \neq b_{i_3} \tag{3.24}$$

Für alle $i \neq i_1, i_2, i_3$ wird $v_i = 0$ gesetzt. Angenommen (3.24) gilt, dann gilt für die rechte Seite:

$$b_{i_1} + b_{i_2} > b_{i_3} \tag{3.25}$$

oder

$$b_{i_1} + b_{i_2} < b_{i_3} \tag{3.26}$$

Es wird angenommen, dass es eine Belegung gibt, die (3.21) erfüllt. Wenn (3.25) gilt, dann kann für diese Belegung (3.26) nicht gelten. So eine Belegung für v_i existiert mit den Werten $v_{i_i} = (-1), v_{i_2} = (-1), v_{i_3} = (1)$ und alle anderen $v_i = 0$. Dann hat man in (3.21) eingesetzt, folgendes:

$$(-1) \cdot a_{i_1} + (-1) \cdot a_{i_2} + 1 \cdot a_{i_3} \leq 0 \Leftrightarrow (-1) \cdot b_{i_1} + (-1) \cdot b_{i_2} + 1 \cdot b_{i_3} \leq 0 \tag{3.27}$$

Damit gilt mit (3.23) und der Belegung für v_i, dass $-a_{i_1} - a_{i_2} + a_{i_3} = 0$ für die linke Seite von (3.21) gilt. Da $b_{i_1} + b_{i_2} > b_{i_3}$ gilt für die rechte Seite von (3.21) nun $-b_{i_1} - b_{i_2} + b_{i_3} < 0$. Diese Belegung kann also nicht für (3.26) gelten, da in diesem Fall $-b_{i_1} - b_{i_2} + b_{i_3} > 0$ für die rechte Seite von (3.21) gelten müsste, während $-a_{i_1} - a_{i_2} + a_{i_3} = 0$ immer noch gilt und somit die linke Seite noch erfüllt ist . Damit wurde für (3.26) ein Widerspruch zu (3.21) gezeigt. Das Gleiche wird nun analog für (3.25) getan.

Es existiert eine Belegung für v_i mit $v_{i_1} = 1, v_{i_2} = 1, v_{i_3} = (-1)$, sodass in (3.21) eingesetzt gilt:

$$1 \cdot a_{i_1} + 1 \cdot a_{i_2} + (-1) \cdot a_{i_3} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \cdot b_{i_1} + 1 \cdot b_{i_2} + (-1) \cdot b_{i_3} \leq 0 \tag{3.28}$$

Dies ist dann genau erfüllt, wenn (3.26) gilt und nicht erfüllt, wenn (3.25) gilt. Dann gilt nun umgeformt mit der linken Seite von (3.21): $a_{i_1} + a_{i_2} - a_{i_3} = 0$ für die linke Seite von (3.21). Da $b_{i_1} + b_{i_2} < b_{i_3}$, gilt für die rechte Seite von (3.21) $b_{i_1} + b_{i_2} - b_{i_3} < 0$. Somit ist für alle Belegungen $\bar{a}_k, \bar{b}_k$ die (3.23) erfüllen gezeigt, dass es eine Belegung für v_i gibt, sodass (3.21) nicht erfüllt ist. Damit ist die Kontraposition für die atomare Formel (3.19) gezeigt.

Um den Beweis des Induktionsanfangs komplett zu zeigen, wird nun ebenfalls die Kontraposition von (3.20) gezeigt. Die Kontraposition für (3.20) lautet:

$$\exists\, i, j:\ a_i \leq a_j \not\Leftrightarrow b_i \leq b_j; \tag{3.29}$$

mit

$$\exists\, i, j:\ a_i \leq a_j \Leftrightarrow b_i > b_j; \tag{3.30}$$

Wenn (3.30) gilt, gibt es keine Möglichkeit, dass (3.21) gilt. Angenommen man hat zwei Belegungen für $v_i, 1 \leq i \leq k$ aus V_0. Man nimmt nun zwei beliebige Zahlen $i_1, i_2 \leq k$ und setzt diese in (3.30) ein. Dann gilt:

$$\exists\, i, j:\ a_{i_1} \leq a_{i_2} \Leftrightarrow b_{i_1} > b_{i_2}; \tag{3.31}$$

Für alle anderen $i \neq i_1, i_2$ wird $v_i = 0$ gesetzt. Dann kann (3.31) umgeformt werden zu:

$$a_{i_1} - a_{i_2} \leq 0 \Leftrightarrow b_{i_2} - b_{i_1} < 0 \tag{3.32}$$

Es lässt sich erkennen, dass (3.32) mit keiner Belegung von v_i in (3.21) eingesetzt, erfüllt ist, da für die linke Seite von (3.32) $v_{i_1} > 0$ und $v_{i_2} < 0$ gelten muss. Für die rechte Seite von (3.32) muss jedoch $v_{i_1} < 0$ und $v_{i_2} > 0$ gelten. Somit ist für alle Belegungen $\bar{a}_k, \bar{b}_k$ die (3.30) erfüllen gezeigt, dass es keine Belegung für v_i gibt, sodass (3.21) erfüllt ist.

Damit ist der Beweis der Kontraposition für den Induktionsanfang abgeschlossen, sodass gezeigt wurde, dass die atomaren Formeln mit $+, \leq$ aus Definition 15 (1) folgen.

Nun soll anhand von Induktion Defintion 14 (2) gezeigt werden, dass wenn $\bar{a}_k\ E_{n+1}\ \bar{b}_k$ gilt, für jedes $\bar{a}_{k+1}$ ein $\bar{b}_{k+1}$ existiert, sodass $\bar{a}_{k+1}\ E_n\ \bar{b}_{k+1}$ gilt. Durch die Ermittlung der H-Begrenzung ist es später nur noch notwendig, die Elemente in Z zu betrachten, die nach oben von m beschränkt werden, um eine obere Schranke für TH($\mathbb{Z}$) zu ermitteln. Dafür soll folgendes bewiesen werden:

Lemma 4. *Sei $\bar{a}_k\ E_{n+1}\ \bar{b}_k$ und $n, k \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien $|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_k| \leq m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und sei $a_{k+1} \in Z$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{N}$, sodass es ein $b_{k+1} \in Z$ gibt mit:*

$$|b_{k+1}| \leq (m+1)^{2^{2^{2^{c \cdot (n+k)}}}} \tag{3.33}$$

und

(1) $v + \sum_{i=1}^{k} v_i a_i \leq a_{k+1} \Leftrightarrow v + \sum_{i=1}^{k} v_i b_i \leq b_{k+1}$, *für alle* $v_1, \ldots, v_k \in V'_n, v \in \mathbb{Z}$ *mit* $|v| \leq \delta^3$

(2) $v + \sum_{i=1}^{k} v_i a_i \geq a_{k+1} \Leftrightarrow v + \sum_{i=1}^{k} v_i b_i \geq b_{k+1}$, *für alle* $v_1, \ldots, v_k \in V'_n, v \in \mathbb{Z}$ *mit* $|v| \leq \delta^3$

(3) a_{k+1} *mod* $\delta^3 = b_{k+1}$ *mod* δ^3 *für* $1 \leq i \leq k$

Es gilt weiterhin $\delta = kgV(V_n)$.

Es soll $n, k, m \in \mathbb{N}$ und $a_{k+1}, b_k \in Z$ als gegeben angenommen werden. Mit Defintion 15 (1) werden folgende formale Terme aufgestellt:

$$t(\bar{a}_k) = v + \sum_{i=1}^{k} v_i a_i \text{ und } t(\bar{b}_k) = v + \sum_{i=1}^{k} v_i b_i \tag{3.34}$$

$$t'(\bar{a}_k) = v' + \sum_{i=1}^{k} v'_i a_i \text{ und } t'(\bar{b}_k) = v' + \sum_{i=1}^{k} v'_i b_i \tag{3.35}$$

Für alle J mit $0 \leq J \leq kgV(V_n)^3$ gilt:

$$t'(\bar{a}_k) - t(\bar{a}_k) \leq J \Leftrightarrow t'(\bar{b}_k) - t(\bar{b}_k) \leq J \tag{3.36}$$

Nun soll (3.36) bewiesen werden, um damit im nächsten Schritt Lemma 4 (1) und (2) zu beweisen. Dazu wird die Gleichung (3.36) zu einer Gleichung wie in Definition 15 (1) mit $v + \sum_{i=1}^{k} v_i a_i \leq 0 \Leftrightarrow v + \sum_{i=1}^{k} v_i b_i \leq 0$ umgeformt. Mit Einsetzen der Terme (3.34) und (3.35) in (3.36) ergibt sich:

$$v' + \sum_{i=1}^{k} v'_i a_i - (v + \sum_{i=1}^{k} v_i a_i) \leq J \Leftrightarrow v' + \sum_{i=1}^{k} v'_i b_i - (v + \sum_{i=1}^{k} v_i b_i) \leq J \tag{3.37}$$

Da v und v' Konstanten sind, können diese an den Anfang der Gleichung gezogen werden. Dann ergibt sich:

$$(v' - v) + \sum_{i=1}^{k} v'_i a_i - \sum_{i=1}^{k} v_i a_i \leq J \Leftrightarrow (v' - v) + \sum_{i=1}^{k} v'_i b_i - \sum_{i=1}^{k} v_i b_i \leq J \tag{3.38}$$

Nun werden die Summen zusammengefasst und das J auf die jeweilige linke Seite der Gleichung geholt. Dann sieht die Gleichung folgendermaßen aus:

$$(v' - v - J) + \sum_{i=1}^{k} (v'_i - v_i) a_i \leq 0 \Leftrightarrow (v' - v - J) + \sum_{i=1}^{k} (v'_i - v_i) b_i \leq 0 \tag{3.39}$$

Mit $v' \leq kgV(V_n)^3, v \leq kgV(V_n)^3$ aus Lemma 4 und $J \leq kgV(V_n)^3$ gilt für den vorderen Teil der Gleichungen $(v' - v - J) \leq 3 \cdot kgV(V_n)^3$. Dies lässt sich anhand von Lemma 1 und Lemma 2 nach oben abschätzen, mit $3 \cdot kgV(V_n)^3 \leq (kgV(V_{n+1}))^2$. Mit der Definition 13 gilt, dass $(v_i' - v_i) \in V_{n+1}$, da wenn $v_i \in V_n'$, dann ist auch $-v_i \in V_n'$ und V_n' ist in V_{n+1} enthalten. Da $\bar{a}_k\ E_{n+1,k}\ \bar{b}_k$ mit Lemma 4 gilt, gilt auch (3.39). Damit ist insgesamt auch (3.36) gezeigt.

Da nun (3.36) gezeigt wurde, soll nun ein $b_{k+1} \in Z$ mit Lemma 4 (1) - (3) gefunden werden. Die Terme $t_1, \ldots, t_l$ mit $1 \leq i \leq l$ sind geordnet mit: $t_1(\bar{a}_k) \leq t_2(\bar{a}_k) \ldots \leq t_l(\bar{a}_k)$. Die gleiche Ordnung gilt, mit $t'(\bar{a}_k) - t(\bar{a}_k) \leq J \Leftrightarrow t'(\bar{b}_k) - t(\bar{b}_k) \leq J$, für die Terme $t_1(\bar{b}_k), \ldots, t_l(\bar{b}_k)$. Für zwei aufeinander folgende Terme $t_i, t_{i+1} \in Z$ gilt, mit (3.36) und $0 \leq J \leq kgV(V_n)^3$, dass sie gleich weit auseinander liegen sollen, also:

$$t_{i+1}(\bar{a}_k) - t_i(\bar{a}_k) = t_{i+1}(\bar{b}_k) - t_i(\bar{b}_k) \tag{3.40}$$

Für alle $J > \text{kgV}(V_n)^3$ gilt dann:

$$t_{i+1}(\bar{a}_k) - t_i(\bar{a}_k) > kgV(V_n)^3 \Leftrightarrow t_{i+1}(\bar{b}_k) - t_i(\bar{b}_k) > kgV(V_n)^3 \tag{3.41}$$

Zuerst sollen die Punkte Lemma 4 (1) und (2) gezeigt werden. Es gibt ein $a_{k+1} \in Z$, sodass mit zwei aufeinander folgenden Termen $t_i(\bar{a}_k) \in Z$ und $t_{i+1}(\bar{a}_k) \in Z$ gilt:

$$t_i(\bar{a}_k) \leq a_{k+1} \leq t_{i+1}(\bar{a}_k) \tag{3.42}$$

Wenn nun $a_{k+1} = t_i(\bar{a}_k)$ oder $a_{k+1} = t_{i+1}(\bar{a}_k)$, dann gibt es ein $b_{k+1} \in Z$ mit $b_{k+1} = t_i(\bar{b}_k)$ oder $b_{k+1} = t_{i+1}(\bar{b}_k)$. Damit ist der Fall, wenn $a_{k+1} = t_i(\bar{a}_k)$ oder $a_{k+1} = t_{i+1}(\bar{a}_k)$ gilt, für Lemma 4 (1) und (2) gezeigt.

Nun gilt es den Fall zu betrachten, falls a_{k+1} keinem der beiden gewählten Terme entspricht, dann gilt für $a_{k+1} \in Z$ und die Terme $t_i(\bar{a}_k), t_{i+1}(\bar{a}_k) \in Z$:

$$t_i(\bar{a}_k) < a_{k+1} < t_{i+1}(\bar{a}_k) \tag{3.43}$$

Es wird ein b_{k+1} gewählt mit:

(1) $a_{k+1}\ mod\ kgV(V_n)^3 = b_{k+1}\ mod\ kgV(V_n)^3$

(2) $t_i(\bar{b}_k) < b_{k+1} \leq t_i(\bar{b}_k) + kgV(V_n)^3$

Mit der zweiten Bedingung des gewählten b_{k+1}, soll durch $\bar{a}_k\ E_{n+1,k}\ \bar{b}_k$ für a_{k+1} gelten:

$$t_i(\bar{a}_k) < a_{k+1} \leq t_i(\bar{a}_k) + kgV(V_n)^3 \tag{3.44}$$

Dann gilt mit (3.44) und $t_i(\bar{b}_k) < b_{k+1} \leq t_i(\bar{b}_k) + kgV(V_n)^3$, aus b_{k+1} (2) von oben auf dieser Seite, in (3.40):

$$a_{k+1} - t_i(\bar{a}_k) = b_{k+1} - t_i(\bar{b}_k) \tag{3.45}$$

und

$$t_{i+1}(\bar{a}_k) - t_i(\bar{a}_k) = t_{i+1}(\bar{b}_k) - t_i(\bar{b}_k) \leq kgV(V_n)^3 \tag{3.46}$$

Durch (3.40) und (3.45) folgt, dass a_{k+1} zu $t_i(\bar{a}_k)$ gleich viel größer sein muss, wie b_{k+1} zu $t_i(\bar{b}_k)$. Ebenfalls folgt mit (3.46), dass $t_{i+1}(\bar{a}_k)$ zu $t_i(\bar{a}_k)$ genauso viel größer sein muss, wie $t_{i+1}(\bar{b}_k)$ zu $t_i(\bar{b}_k)$ größer ist. Damit Lemma 4 (1) und (2) erfüllt sind, muss also durch (3.43) auch für b_{k+1} gelten:

$$t_i(\bar{b}_k) < b_{k+1} < t_{i+1}(\bar{b}_k) \tag{3.47}$$

Es soll (3.47) mit einem Widerspruchsbeweis gezeigt werden. Dann folgt als Annahme für b_{k+1}:

$$b_{k+1} \geq t_{i+1}(\bar{b}_k) \tag{3.48}$$

Insgesamt folgt also, dass entweder (3.43) und (3.47), oder dass jeweils $a_{k+1} \geq t_{i+1}(\bar{a}_k)$ und $b_{k+1} \geq t_{i+1}(\bar{b}_k)$ gelten muss, damit (3.40) erfüllt ist. Wenn (3.48) gilt, kann aber (3.47) und somit auch (3.43) nicht gelten. Da aber (3.43) gelten muss, ergibt sich ein Widerspruch zu der Annahme in (3.48). Es muss also für b_{k+1} die Bedingung (3.47) erfüllt sein, damit ein passendes $b_{k+1} \in Z$ zu $a_{k+1} \in Z$ gefunden werden kann. Die Fälle mit $a_{k+1} < t_1(\bar{a}_k)$ und $a_{k+1} > t_l(\bar{a}_k)$ sind ähnlich zu den voherigen Fällen, und müssen nicht genauer betrachtet werden. Somit konnten Lemma 4 (1) und (2) bewiesen werden.

Als Nächstes wird Lemma 4 (3) nachgewiesen. Dazu wird gezeigt, dass δ^3, $\text{kgV}(V_{n+1})^2$ teilt. Dies wird anhand von Jochen Eisingers „Automatenbasierte Entscheidungsverfahren für Theorien der Logik erster Stufe mit Addition“ S.91/92 gezeigt.

Sei p_i mit $i \geq 1$ die i-te Primzahl. Mit einem $\bar{m} \in \mathbb{N}$ gilt dann $\delta = \prod_{i\geq 1} p_i^{m_i}$. In der Menge V_n gibt es mit $i \geq 1, m_i > 0$ mindestens eine Zahl, die sich durch $p_i^{m_i}$ teilen lässt. Fortführend gibt es dann in der Menge V'_n ebenfalls mindestens eine Zahl, die sich dann durch $p_i^{2m_i}$ teilen lässt. Dementsprechend muss $\text{kgV}(V_{n+1})$ von mindestens $p_i^{2m_i}$ oder größeren Exponenten als $2m_i$ geteilt werden. Für $\text{kgV}(V_{n+1})^2$ lässt sich von $\text{kgV}(V_{n+1})$ ableiten, dass mindestens $(p_i^{2m_i})^2$, also $p_i^{4m_i}$ gilt, um $\text{kgV}(V_{n+1})^2$ zu teilen. Da für jedes $\delta \leq \delta^3$ und somit für jeden Primfaktor $p_i^{m_i} \leq p_i^{3m_i}$ gilt, und für $\text{kgV}(V_{n+1})^2$ aber mindestens $p_i^{4m_i}$ gilt, folgt insgesamt $p_i^{3m_i} \leq p_i^{4m_i}$ und somit auch $\delta^3 \leq \text{kgV}(V_{n+1})^2$.

Zumal nun gezeigt wurde, dass $\frac{kgV(V_{n+1})^2}{\delta^3}$ eine ganze Zahl ist, ist Lemma 4 (3) erfüllt. Da also aufgrund von Lemma 4 (3) $a_{k+1}\ mod\ \delta^3 = b_{k+1}\ mod\ \delta^3$ gilt, gilt auch Defintion 15 (2) mit der stärkeren Einschränkung $a_{k+1}\ mod\ kgV(V_{n+1})^2 = b_{k+1}\ mod\ kgV(V_{n+1})^2$. Damit ist insgesamt $\bar{a}_k\ E_{n+1,k}\ \bar{b}_k$ und $\bar{a}_{k+1}\ E_{n,k+1}\ \bar{b}_{k+1}$ für die Äquivalenz von Z aus Definition 15 gezeigt. Der Induktionsschritt ist somit abgeschlossen.

Fortführend gilt zu zeigen, wie die Begrenzung $(m+1)^{2^{2^{2^{c\cdot(n+k)}}}}$ für b_{k+1} aus Lemma 4 folgt. Dies kann mit einigen Abschätzungen aus 3.2 gezeigt werden. Durch die voherigen Beweisschritte wird deutlich, dass $b_{k+1} \leq kgV(V_n)^3$ vom Term $t_j(\bar{b}_k)$ für manche j gilt. Dann lässt sich anhand von Lemma 1 und 2 aus Kapitel 3.2 und dem Induktionsschritt folgendes abschätzen:

$$|b_{k+1}| \leq kgV(V_n)^3 + (k \cdot m)Max(V'_i) \tag{3.49}$$

Nun wird mit Lemma 2 das $kgV(V_n)$ abgeschätzt mit:

$$|b_{k+1}| \leq (Max(V_{n+1}))^{3\cdot|V_{n+1}|} + (k \cdot m)Max(V'_i) \tag{3.50}$$

Ebenso kann nun $Max(V'_i)$ mit Lemma 2 weiter abgeschätzt werden. Dann ergibt sich:

$$|b_{k+1}| \leq (Max(V_{n+1}))^{3\cdot|V_{n+1}|} + (k \cdot m)V_n \tag{3.51}$$

Wenn nun die beiden bestimmten oberen Grenzen aus Lemma 1 und Lemma 2 eingesetzt werden, ergibt sich als obere Grenze für b_{k+1} mit einer beliebigen Konstante c:

$$|b_{k+1}| \leq (m+1) \cdot 2^{2^{2^{c(n+k)}}} \tag{3.52}$$

Die ermittelte H-Funktion der Struktur $\mathbb{Z}$ folgt mit dem Beweis zur Definition 14. Die H-Funktion soll mit einem $b_{k+1} \in Z$ lauten:

$$H(n,k,m) = (m+1) \cdot 2^{2^{2^{c\cdot(n+k)}}} \text{ für eine Konstante } c \in \mathbb{N} \tag{3.53}$$

Damit die H-Funktion für TH($\mathbb{Z}$) gilt, wird bewiesen, dass ein $b_{k+1} \in Z$ gefunden werden kann. Es sind $n, k, m \in \mathbb{N}$ und $a_{k+1} \in \mathbb{Z}$ als gegeben anzunehmen. Ebenfalls gilt $|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_k| \leq m$. Ein passendes $b_{k+1} \in Z$ kann anhand des Induktionsschrittes ermittelt werden.

Dazu soll gezeigt werden, dass ein $b_{k+1} \in Z$ nach wie vor die Bedingungen aus Defintion 15 erfüllt.

Lemma 5. *Es gelten alle Bedingungen aus Lemma 4, mit folgenden Abänderungen:*

(1) $v + \sum_{i=1}^{k} v_i a_i \leq \delta a_{k+1} \Leftrightarrow v + \sum_{i=1}^{k} v_i b_i \leq b'_{k+1}$, *für alle* $v_1, \ldots, v_k \in V'_n, v \in \mathbb{Z}$ *mit* $|v| \leq \delta^3$

(2) $v + \sum_{i=1}^{k} v_i a_i \geq \delta a_{k+1} \Leftrightarrow v + \sum_{i=1}^{k} v_i b_i \geq b'_{k+1}$, *für alle* $v_1, \ldots, v_k \in V'_n, v \in \mathbb{Z}$ *mit* $|v| \leq \delta^3$

(3) a_{k+1} *mod* $\delta^3 = b'_{k+1}$ *mod* δ^3 *für* $1 \leq i \leq k$

Dann wird ein $b'_{k+1} \in Z$ gesucht, sodass alle Bedingungen aus Lemma 4, mit δa_{k+1} für a_{k+1} eingesetzt und dem gesuchten b'_{k+1} für b_{k+1} eingesetzt, erfüllt sind. Durch den Beweis zu Lemma 4 (3) wird impliziert, dass b'_{k+1} von δ geteilt wird. Nun wird b_{k+1} so gewählt, dass $b_{k+1} = \frac{b'_{k+1}}{\delta}$ gilt. Dann folgt aus dem Beweis zu Lemma 4 (3), dass auch die Bedingung a_{k+1} *mod* $kgV(V_n)^2 = b_{k+1}$ *mod* $kgV(V_n)^2$ gilt. Da δ^2, $kgV(V_{n+1})^2$ teilt, ist auch a_i *mod* $kgV(V_n)^2 = b_i$ *mod* $kgV(V_n)^2$ aus Defintion 15 (2) für $\bar{a}_k\ E_{n+1,k}\ \bar{b}_k$ erfüllt. Damit das gesuchte b_{k+1} gilt, muss also auch Definition 15 (1) für $n+1$ erfüllt sein.

Es werden $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1} \in V_n$ gewählt, mit $|u| \leq \delta^2$ und $u_{k+1} \neq 0$. Dann soll in Defintion

15 (1) eingesetzt gelten:

$$u + \sum_{i=1}^{k+1} u_i a_i \leq 0 \Leftrightarrow u + \sum_{i=1}^{k+1} u_i b_i \leq 0 \tag{3.54}$$

Dann wird für Defintion 15 (1) $v = \frac{u\delta}{|u_{k+1}|}$ und $v_i = \frac{u_i\delta}{|u_{k+1}|}$ für alle $1 \leq i \leq k$ gesetzt. Dann soll folgendes gelten:

$$v + \sum_{i=1}^{k} v_i a_i + j\delta a_{k+1} \leq 0 \Leftrightarrow v + \sum_{i=1}^{k} v_i b_i + j\delta b_{k+1} \leq 0 \text{ mit } j \in \{1, -1\} \tag{3.55}$$

Da mit Lemma 4 (1) und (2) $|v| \leq \delta^3$ und $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V'_n$ gilt, ist Lemma 4 (1) mit $j = (-1)$ in (3.55), und Lemma 4 (2) mit $j = 1$ in (3.55) erfüllt. Es wird deutlich, dass ein $b_{k+1} \in Z$ gefunden werden kann, sodass nach wie vor alle Kriterien für die Äquivalenz von $\mathbb{Z}$ erfüllt sind. Mit dem ermittelten $|b_{k+1}|$ und Definition 14 (2) egibt sich:

$$|b_{k+1}| \leq (m+1) \cdot 2^{2^{2^{c(n+k)}}} \tag{3.56}$$

Dann gibt es eine H-Funktion mit $|b_{k+1}| \leq H(n, k, m)$. Dann folgt insgesamt:

$$H(n, k, m) = (m+1) \cdot 2^{2^{2^{c(n+k)}}} \tag{3.57}$$

Da nun beide Punkte der Defintion 14 bewiesen wurden, und ebenfalls ein passendes $b_{k+1} \in Z$ gefunden wurde, ist Lemma 3 gezeigt, mit:

$$\mathrm{TH}(\mathbb{Z}) \leq H(n, k, m) \Leftrightarrow \mathrm{TH}(\mathbb{Z}) \leq (m+1) \cdot 2^{2^{2^{c(n+k)}}} \tag{3.58}$$

3.4 Ermittlung einer oberen komplexitätstheoretischen Schranke für TH($\mathbb{Z}$)

Da eine H-Funktion für die Struktur $\mathbb{Z}$ bestimmt werden konnte, kann anhand dieser Funktion eine obere komplexitätstheoretische Schranke des Platzbedarfes zur Überprüfung, dass Strukturen einen Satz aus der Theorie TH($\mathbb{Z}$) erfüllen, ermittelt werden. Die Herleitung der H-Funktion wurde im voherigen Abschnitt bewiesen.

Definition 16. *DSPACE(S(n)) = {A | Es gibt eine deterministische Turingmaschine, die die Menge A in Platz O(S(n)) akzeptiert.*

Nun soll noch gezeigt werden, dass die Theorie TH($\mathbb{Z}$) in Platz DSPACE($2^{2^{cn}}$), mit einer Konstante c, wie in Definiton 6 beschrieben, entschieden werden kann. Weiterhin ist c so gewählt, dass für TH($\mathbb{Z}$) die H-Begrenzung mit $H(n, k, m) = (m+1) \cdot 2^{2^{2^{c(n+k)}}}$ gilt. Ein Satz

$F(\bar{x}_n)$ der Länge n, wird äquivalent in einen quantorenfreien Satz $F'(\bar{x}_n)$ in der pränexen Normalform mit $Q_1x_1, Q_2x_2, \ldots, Q_nx_nF'(\bar{x}_n)$, wie in Defintion 4, umgeformt.

Theorem 1. *Weiterführend zur Definition der H-Begrenzung gilt:*

Für jeden Satz der Form $Q_1x_1, Q_2x_2, \ldots, Q_nx_nF'(\bar{x}_n)$ mit $Qt(F'(\bar{x}_n)) \leq n$, sind $m_0, \ldots, m_n$ aus dem Alphabet $\Sigma^* \cup \{\infty\}$ mit der Ordnung $m_0 \leq m_1 \leq \ldots \leq m_n$. Es gilt $H(n-i, i-1, m_{i-1}) \leq m_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann gilt:

$$Q_1x_1, \ldots, Q_nx_nF'(\bar{x}_n) \text{ wahr in } Z \Leftrightarrow (Q_1x_1 \leq m_1), \ldots, (Q_nx_n \leq m_n)F'(\bar{x}_n) \text{ wahr in } Z \quad (3.59)$$

Theorem 1 ist durch den Beweis von Jeanne Ferrante und Charles W. Rackoff aus „The Computational Complexity of Logical Theories „ S.31 gezeigt. Durch die H-Begrenzung wird es nun möglich, dass x_i nicht über alle Elemente von Z, sondern nur über die Elemente von Z mit $(Q_1x_1 \leq m_1), \ldots, (Q_nx_n \leq m_n)$, die durch m_i beschränkt sind, iterieren muss. Dann ist $F(\bar{x}_n)$ mit Theorem 1 äquivalent zu $(Q_1x_1 \leq m_1), (Q_2x_x \leq m_2), \ldots, (Q_nx_n \leq m_n)F'(\bar{x}_n)$.

Die Quantoren Q_i für alle $1 \leq i \leq n$ können mit $2^{2^{cn+i}} + 2$ Bandzellen abgedeckt werden. Jede ganze Zahl $z \leq 2^{2^{2^{cn+i}}}$ kann dann innerhalb von $2^{2^{2^{cn+i}}}$ Bandzellen in binär geschrieben werden. Nun wird $F(\bar{x}_n)$ entschieden, indem über alle Quantoren iteriert wird. Dabei wird bei jeder Iteration getestet, ob $F'(\bar{x}_n)$ auf verschiedenen Tupeln von ganzen Zahlen der Länge n als wahr gilt. Es lässt sich erkennen, dass es ein $c \in \mathbb{N}$ gibt, dass groß genug ist, sodass am Ende insgesamt $2^{2^{cn}}$ Bandzellen benötigt werden um über alle Quantoren zu iterieren und $F'(\bar{x}_n)$ als wahr zu entscheiden. Somit kann insgesamt auch $F(\bar{x}_n)$ in dem bestimmten Platzbedarf entschieden werden.

Eine Turing Maschine benötigt also zur Berechnung der Prozedur $2^{2^{cn}}$ Bandzellen, um ein $F(\bar{x}_n)$ in $\mathbb{Z}$ zu entscheiden. Es ergibt sich insgesamt eine obere Grenze DSPACE($2^{2^{cn}}$) mit einer Konstante c, für die Theorie TH($\mathbb{Z}$).

4 Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit konnte aufgezeigt werden, was Ehrenfeucht Spiele sind, und wie diese angewendet werden können, um Prädikatenlogiken erster Stufe zu analysieren. Es konnte eine praktische Anwendung der Ehrenfeucht Spiele in Kapitel 3 gezeigt werden. Dabei wurde die obere Grenze DSPACE($2^{2^{cn}}$), für eine Konstante $c \in \mathbb{N}$, der Theorie TH($\mathbb{Z}$) ermittelt. Die Theorie der ganzzahligen Addition konnte somit als entscheidbar gezeigt und in eine passende Komplexitätsklasse eingeordnet werden.

Die Ehrenfeucht Spiele sind eines der wenigen Entscheidungsprozeduren in der Modelltheorie, die sowohl auf endliche, als auch unendliche Strukturen angewendet werden können. Durch ihren spieltheoretischen Kontext wird es möglich Untersuchungen von Strukturen auf Äquivalenzen zu veranschaulichen. Mithilfe der Ehrenfeucht Spiele wird es möglich unendliche Mengen, durch eine induktive Darstellung, in endliche Mengen zu unterteilen. Anhand endlicher Mengen können dann spezifische Untersuchungen vorgenommen werden. Diese Untersuchungen beziehen sich unter anderem auf die Ermittlung von komplexitätstheoretischen Schranken, Entscheidbarkeit und weiterführend auch auf Vollständigkeit.

In dieser Arbeit wurde der Fokus der Ehrenfeucht Spiele auf die Betrachtung der Prädikatenlogik erster Stufe gelegt. In der Spieltheorie können die Ehrenfeucht Spiele, zusätzlich zu den Untersuchungen, die in dieser Arbeit aufgezeigt wurden, feststellen, ob eine Aussage anhand einer Formel der ersten Stufe beschrieben werden kann und wie viele Variablen und Quantoren nötig sind, um die Aussage als Formel darzustellen. Weiterführend können die Ehrenfeucht Spiele auch auf die Prädikatenlogik zweiter Stufe angewendet werden. [Lib04]

In der praktischen Informatik lassen sich Ehrenfeucht Spiele für Untersuchungen von Eigenschaften der Datenbanktheorie anwenden. Eine beispielhafte Anwendung der Ehrenfeucht Spiele in der Datenbanktheorie dient zur Darstellung von Datenbanken als Graphendatenbanken oder als relationale Datenbanken. [Sch02]

Abschließend ist festzustellen, dass die Ehrenfeucht Spiele vielseitig einsetzbar sind, und in vielen Themengebieten der theoretischen Informatik Anwendung finden. Des Weiteren haben die Erkenntnisse der Ehrenfeucht Spiele geholfen weitere Erkenntnisse über bereits bekannte Probleme der theoretischen Informatik zu erhalten.

Literatur

[Dal94] Dirk van Dalen. *Logic and structure (3. ed.)* Universitext. Springer, 1994. ISBN: 978-3-540-57839-0.

[EFT07] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum und Wolfgang Thomas. *Einführung in die mathematische Logik (5. Aufl.)* Spektrum Akademischer Verlag, 2007.

[Eis09] Jochen Eisinger. „Automatenbasierte Entscheidungsverfahren für Theorien der Logik erster Stufe mit Addition“. Diss. University of Freiburg, 2009. URL: `http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/6409/`.

[FR79] Jeanne Ferrante und Charles W. Rackoff. *The Computational Complexity of Logical Theories*. Springer Verlag, 1979.

[Kou+06] Michal Koucký u. a. „Circuit Lower Bounds via Ehrenfeucht-Fraïssé Games“. In: *21st Annual IEEE Conference on Computational Complexity (CCC 2006), 16-20 July 2006, Prague, Czech Republic*. IEEE Computer Society, 2006, S. 190–201. DOI: `10.1109/CCC.2006.12`. URL: `https://doi.org/10.1109/CCC.2006.12`.

[Lib04] Leonid Libkin. *Elements of Finite Model Theory*. Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer, 2004. ISBN: 3-540-21202-7. DOI: `10.1007/978-3-662-07003-1`. URL: `http://www.cs.toronto.edu/%5C%7Elibkin/fmt`.

[Mau97] Françoise Maurin. „Ehrenfeucht Games and Ordinal Addition“. In: *Ann. Pure Appl. Log.* 89.1 (1997), S. 53–73. DOI: `10.1016/S0168-0072(97)00005-5`. URL: `https://doi.org/10.1016/S0168-0072(97)00005-5`.

[Sch02] Nicole Schweikardt. „An Ehrenfeucht-Fraisse Game Approach to Collapse Results in Database Theory“. In: *CoRR* cs.LO/0212049 (2002). URL: `http://arxiv.org/abs/cs/0212049`.

[Tho93] Wolfgang Thomas. „On the Ehrenfeucht-Fraïssé Game in Theoretical Computer Science“. In: *TAPSOFT'93: Theory and Practice of Software Development, International Joint Conference CAAP/FASE, Orsay, France, April 13-17, 1993, Proceedings*. Hrsg. von Marie-Claude Gaudel und Jean-Pierre Jouannaud. Bd. 668. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 1993, S. 559–568. DOI:

10.1007/3-540-56610-4_89. URL: https://doi.org/10.1007/3-540-56610-4%5C_89.

[WD97] William Weiss und Cherie D'Mello. *Fundamentals of Model Theory*. 1997.